J. QUINET

curso elemental de matemáticas superiores

tomo
6

geometría analítica plana y aplicaciones diversas

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMO VI

Geometría analítica plana y aplicaciones diversas

OBRAS DEL MISMO AUTOR PUBLICADAS POR

PARANINFO

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES

TOMO I

Complementos de álgebra. Las derivadas y sus aplicaciones, con 400 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos. Cálculo diferencial, con 700 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones, con 450 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO IV

Continuación del cálculo integral y aplicaciones, con 290 ejercicios y problemas a resolver.

Cálculo integral, complementos y aplicaciones.
Cálculo de los momentos de inercia.
Algunas aplicaciones de las integrales.
La serie de *Fourier*, con *ejemplos detallados* de desarrollos.
Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral.
Integrales curvilíneas.
Integrales curvilíneas.
Integración de diferenciales totales.
Integrales múltiples. Integrales dobles. Nociones sobre integrales triples.

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, con 300 ejercicios y problemas a resolver.

Ecuaciones de primer y segundo orden, tipos diversos, con numerosos ejemplos.
48 ejemplos de aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales a problemas (mecánica, física, electricidad, termodinámica, resistencia de materiales, etc.).
Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).
Introducción al estudio del potencial, y al estudio de los campos.

TOMO VI, con 782 ejercicios y problemas a resolver.

Geometría analítica plana.
Estudio de las cónicas y aplicaciones.
Trazado de curvas con numerosos ejemplos detallados.
Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

TEORIA Y PRACTICA DE LOS CIRCUITOS ELECTRONICOS Y DE LOS AMPLIFICADORES

TOMO I

Teoría y aplicaciones del cálculo de complejos al estudio de los circuitos de electrónica.

TOMO II

Los amplificadores HF y BF. Los osciladores y la modulación. Los filtros y los puentes de medida.

TOMO III

Estudio general de la propagación de la corriente HF a lo largo de las líneas y aplicaciones. Antenas. — Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

Cálculo diferencial e integral y Geometría analítica plana con un gran número de ejemplos y aplicaciones

por

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

Prólogo de

R. BARTHÉLEMY

Miembro de la Academia de Ciencias

TOMO VI

Geometría analítica plana y aplicaciones diversas

De uso para:
Ingenieros, alumnos-ingenieros, Técnicos diversos, estudiantes

1966

PARANINFO

MADRID

Traducido por
ANGEL GARCIA ARANDA
Ingeniero Aeronáutico

© 1965 DUNOD

Depósito Legal: Z. 284. - 1966

PARANINFO · Meléndez Valdés, 14 y 65 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza - 1966

PROLOGO

J. QUINET es un profesor que apreció desde hace treinta años. Le hubiera sido muy fácil el obtener para su obra de Matemáticas Superiores, las frases elogiosas de un hombre del arte matemático, y en Francia existen hombres muy notables. Sin embargo, se ha contentado con un «usuario», con un hombre de los que no crean ni juzgan las matemáticas, pero que intentan servirse de ellas.

No estoy pues, especialmente calificado para presentar la obra de un especialista, y si he aceptado a intervenir, es porque J. QUINET, Profesor de Matemáticas, comenzó siendo un Ingeniero Electricista y continuó siéndolo.

Esto explica la forma atractiva que ha sabido dar a exposiciones consideradas frecuentemente como áridas.

Sin abandonar la línea ni el rigor de la enseñanza clásica, que proporciona las alegrías más puras a aquellos —los hay— que aman las matemáticas, muestra, al mismo tiempo que expone el programa, y no al final, para qué sirven las fórmulas del álgebra en la resolución de los problemas de física.

El estudiante, el futuro ingeniero, se da cuenta entonces, de la necesidad de esta «herramienta» intelectual, sin la cual, a pesar de sus dotes de intuición o de invención, no lograría franquear ciertos límites rápidamente alcanzados mediante ella.

Comprende QUINET, que este prodigioso esfuerzo del pensamiento, realizado desde hace algunos siglos, no es la obra de un aficionado, útil solamente para amueblar el espíritu y pasar los exámenes, sino que es una de las bases fundamentales de su profesión.

La obra de J. QUINET, prevista para un curso de una Escuela de Radioelectricidad, está evidentemente orientada hacia los campos de aplicación eléctrica, y yo siento ahora, al leerla, el no haberla tenido antaño, cuando en provincias, preparaba solo el examen de la Escuela Superior de Electricidad, cuando extraía los conceptos matemáticos de un enorme tratado de «Especiales», en el cual era completamente incapaz de hacer las selecciones necesarias.

J. QUINET no olvida sin embargo la mecánica matemática y construye sólidos cimientos para los que tienen mayores aspiraciones. Los estudios de las series, el desarrollo de FOURIER, conducen, en efecto, a las proximidades del cálculo simbólico y no queda mucho camino a recorrer entre las soluciones presentadas para las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de BESSEL.

Intencionadamente hago alusión a aquellas partes que entran ahora en la técnica del ingeniero de circuitos y de ondas centimétricas. Pero no se puede abarcar en un libro encuadrado dentro de las matemáticas elementales toda la estructura de los cálculos de la física moderna. J. QUINET nos conduce a los umbrales de estos campos. Nos da los medios para resolver la mayor parte de los problemas planteados al ingeniero y nos proporciona excelentes trampolines de partida.

Deseo que escriba nuevas obras en las que nos invite a incursiones hacia nuevos horizontes. Todos sus alumnos y amigos le seguirán con interés.

René BARTHÉLEMY.
Miembro de la Academia de Ciencias.

«En el campo de la ciencia, el azar no favorece más que a los espíritus que han sido preparados.»

PASTEUR.

INTRODUCCION

En el sexto y último Tomo de este «*Curso elemental de matemáticas superiores*» se encontrará el estudio de la Geometr: a analítica plana, con gran número de ejercicios progresivos explicados con detalle.

— Comenzamos estableciendo y estudiando las curvas fundamentales, a continuación la recta, la circunferencia, tangentes y normales a las curvas, puntos singulares, asíntotas y curvas envolventes.

Si el estudio de las cónicas ocupa a continuación gran parte de este Tomo VI, se debe a que existen gran número de problemas en aplicaciones prácticas que utilizan elipses, hipérbolas y parábolas.

A continuación estudiamos el trazado de las curvas de las funciones en coordenadas cartesianas, polares, paramétricas e implícitas, con numerosos ejemplos.

Por último, exponemos aplicaciones diversas de las cónicas a problemas concretos, tales como la composición de dos vibraciones, las interferencias, la característica dinámica de una válvula de Radio, así como el estudio de la elipse de inercia en los problemas de Mecánica y de Resistencia de Materiales.

— El estudio de la Geometría analítica plana presenta un triple interés:

1.° en primer lugar, es una excelente aplicación de ciertas partes, ya estudiadas, de matemáticas y de análisis: derivadas, cálculo diferencial, variaciones de funciones, curvas diversas, etc.,

2.° también es una puerta abierta y un potente útil de trabajo para aplicaciones prácticas a la Física, a la Mecánica, a la Radio y a todas las ciencias en general (tal como el teleguiado de los aviones por el sistema L.O.R.A.N., que utiliza hipérbolas), siendo numerosos los problemas industriales y prácticos que se apoyan en la Geometría analítica.

3.° pero esta parte de las matemáticas tiene un tercer interés: es una magnífica y extraordinaria gimnasia intelectual que enseña a discutir, a ligar ideas, a deducir y a hallar, siendo esto quizás lo más importante a considerar para el lector y para la formación de su espíritu científico, que debe ser espíritu de claridad y de lógica.

En efecto, la Geometría analítica es una deslumbradora escuela de lógica y de claridad, y su interés pedagógico es inmenso. Hemos querido ser útiles a todos aquellos que quieran estudiar, y para ello hemos dado, a medida que se avanza en la obra, numerosos ejemplos sobre cada una de las materias tratadas, para no dejar nada en la sombra.

— Así, al llegar al final de estos seis tomos, el lector se encontrará en situación de abordar con fruto, ya sean tratados de Matemáticas más completos, o bien técnicas particulares del ingeniero y del técnico profesional, y si el autor ha podido interesar al lector en las matemáticas superiores y hacérselas comprender, se sentirá recompensado en su trabajo.

— Por último, debo dar una vez más mis más expresivas gracias y mi profundo reconocimiento a los señores GIROUX y DIEUDÉ ingenieros, así como al señor QUINQUETON, Director adjunto del Instituto Técnico profesional, que han querido corregir las pruebas y verificar todos los cálculos.

— También he de agradecer de nuevo a la Editorial PARANINFO el el cuidado extremo aportado a la presentación impecable de este curso y en particular al señor CASTELLAN, director técnico, por sus preciosos consejos y la ayuda constante que no ha cesado de proporcionarnos.

J. QUINET.

NOTA. — En los 16 capítulos de este tomo *existe gran número de ejemplos numéricos cuidadosamente explicados y con todos los detalles de los cálculos.*

Nota para la tercera edición

En esta tercera edición, revisada, corregida y aumentada en un capítulo entero sobre inversión, polos y polares, hemos dado al final una lista recapitulativa de las fórmulas de este Tomo VI, así como 800 ejercicios y problemas a resolver. El alumno podrá de esta manera practicar, por medio de un trabajo personal, las teorías del curso.

INDICE DE MATERIAS

1. Objeto de la geometría analítica ... ... *Pág.* 17

CAPÍTULO PRIMERO

Planteamiento de ecuaciones de algunas curvas fundamentales

2. Ecuación de la elipse 19
3. Elipse considerada como proyección de un círculo 21
4. Trazado de la elipse 22
5. Elipsógrafo 23
6. Hipérbola 23
7. Trazado de la hipérbola 26
8. Parábola 27
9. Trazado de la parábola 29
10. La cisoide 29
11. La estrofoide 31
12. La lemniscata 32
13. La cicloide **33**

CAPÍTULO II

Diferentes sistemas de coordenadas y cambio de ejes de coordenadas

14. Sistemas de coordenadas 35
15. Cambio de ejes de coordenadas 36
16. Ejemplos 38
17. Rotación de ejes 40
18. Ejemplos 41
19. Transformación de coordenadas polares o cartesianas 43
20. Ejemplos diversos 43
21. Aplicación de las fórmulas de cambio de coordenadas a la ecuación general de las cónicas 45
22. Generalidades sobre las curvas 48
23. Distancia entre dos puntos 50

Capítulo III

Estudio de la recta

24. Ecuación de la recta ... 51
25. Angulo de dos rectas ... 53
26. Ecuación de una recta pasando por un punto conocido ... 55
27. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos ... 56
28. Condición para que tres puntos estén alineados ... 58
29. Distancia de un punto a una recta ... 58
30. Aplicación ... 60
31. Ecuación general de las rectas que pasan por el punto de intersección de otras dos dadas ... 61
32. Bisectrices del ángulo de dos rectas ... 62
33. Ejercicio ... 63
34. Desigualdades de primer grado ... 64
35. Area de un triángulo ... 65
36. Ecuaciones homogéneas de segundo grado en x e y ... 66
37. Generalización ... 67

Capítulo IV

Estudio de la circunferencia

38. Ecuación de la circunferencia ... 71
39. Intersección de una circunferencia y una recta ... 74
40. Intersección de dos circunferencias ... 75
41. Potencia de un punto con relación a una circunferencia ... 77
42. Eje radical de dos circunferencias ... 78

Capítulo V

Estudio general de tangentes y de normales

43. Ecuación de la tangente a una curva ... 79
44. Investigación de las tangentes paralelas a una dirección dada. 82
45. Tangente a una curva, y pasando por un punto exterior dado. 84
46. Ejercicios sobre tangentes ... 85
47. Subtangente ... 87
48. Ecuación de la normal ... 88
49. Subnormal ... 90
50. Propiedad óptica de la parábola ... 91
51. Tangente a una curva en el origen ... 93
52. Teorema sobre la ecuación de las tangentes en el origen ... 94
53. Posición de una curva con relación a su tangente ... 95
54. Ejemplos ... 98

Puntos singulares de las curvas planas

55. Diferentes clases de puntos singulares ... 100
56. Investigación de los puntos singulares ... 101
57. Ejemplos de puntos singulares ... 102
58. Otro método para hallar los puntos singulares ... 106

CAPÍTULO VI

Estudio de las asíntotas

59. Definición de asíntota ... 107

Primer caso: *curva* $y = f(x)$

60. Asíntotas paralelas a los ejes ... 107
61. Asíntotas oblicuas ... 108
62. Ejemplos ... 109

Segundo caso: *curva* $f(x, y) = 0$

63. Ecuación de las asíntotas ... 115
64. Generalización ... 117
65. Ejemplos ... 120
66. Investigación de la ordenada en el origen ... 121

CAPÍTULO VII

Estudio de las cónicas

67. Resolución y trazado de las cónicas ... 125
68. Discusión ... 126
69. Primer caso: $B^2 - 4AC < 0$ ... 127
70. Segundo caso: $B^2 - 4AC > 0$ ... 129
71. Tercer caso: $B^2 - 4AC = 0$ ... 134
72. Asíntotas de las cónicas ... 138
73. Caso de una hipérbola equilátera ... 141
74. Hipérbola equilátera referida a sus asíntotas ... 142
75. Caso particular de investigación de asíntotas ... 143
76. Ecuación general de una hipérbola referida a sus asíntotas ... 145
77. Algunas aplicaciones de las hipérbolas equiláteras ... 147
78. Ejercicio de mecánica ... 147
79. La parábola carece de asíntotas ... 149
80. Centro de una curva ... 150
91. Cálculo de las coordenadas del centro ... 151
82. Lugar geométrico de los centros de una cónica ... 153

Capítulo VIII

Reducción de la ecuación general de las cónicas

83. Principio 155
84. Caso de la elipse y de la hipérbola 155
85. Ecuaciones reducidas de la elipse y de la hipérbola 157
86. Caso de la parábola 159
87. Operaciones a realizar en la reducción de una cónica 161
88. Ejemplos 162
89. Resumen 165
90. Consecuencias. Cónica referida a sus ejes 166

Capítulo IX

Continuación de las cónicas. Diámetros. Ejes. Focos. Directrices.

91. Ecuación común a las tres cónicas 167
92. La parábola es el límite de una elipse o de una hipérbola 169
93. Definición y determinación de diámetros 171
94. Relación entre los coeficientes angulares del diámetro y de las cuerdas conjugadas 173
95. Ejemplos 174
96. Angulos de dos diámetros conjugados 176
97. Diámetro de la parábola 176
98. Ejes de las cónicas. Definición y determinación 177
99. Teorema de Apolonio 180
100. Directrices y focos 182
101. Regla práctica 184
102. Ecuación general de la tangente a una cónica 189
103. La parábola es el límite de una elipse (otro método) 190

Capítulo X

Envolventes y envolutas

104. Definición y determinación de la curva envolvente 193
105. Definición y determinación de la envoluta 202
106. Ejemplos 203

Capítulo XI

Estudio y construcción de curvas en coordenadas cartesianas

107. Marcha a seguir para el trazado de la curva de una función $y = (x)$ 211
108. Ejemplos 213

Capítulo XII

Estudio y trazado de las curvas en coordenadas polares

109. Ecuación de la recta ... 229
110. Ecuación de las circunferencia ... 231
111. Ecuación de la elipse ... 232
112. Ecuación de la parábola ... 233
113. Ecuación de la hipérbola ... 233
114. La evoluta del círculo ... 236
115. Tangentes a una curva ... 237
116. Ramas infinitas y asíntotas ... 239
117. Intervalos en los que varía el ángulo polar ... 241
118. Trazado de una curva en coordenadas polares ... 242
119. Ejemplos ... 243

Capítulo XIII

Estudio y construcción de curvas paramétricas

120. Ecuaciones de algunas curvas fundamentales ... 255
121. Estudio y trazado de curvas paramétricas ... 258
122. Marcha a seguir para trazar la curva ... 260
123. Ejemplos ... 260

Capítulo XIV

Estudio y construcción de las curvas de las funciones implícitas

$$f(x, y) = 0$$

124. Casos sencillos ... 273
125. Caso general y marcha a seguir ... 273
126. Ejemplos ... 274

Capítulo XV

Inversión. — Polos y polares

127. Definición de inversión ... 281
128. Determinación de las ecuaciones de la inversión ... 281
129. Ejemplos ... 282
130. Inversión de las cónicas ... 283
131. Inversa de un conjunto de rectas paralelas ... 284

Polos y polares

132. Caso de un círculo. Definición de la polar ... 285
133. Polares de una cónica ... 287

Capítulo XVI

Algunas aplicaciones físicas de las cónicas

134. Composición de dos vibraciones perpendiculares. Estudio de cinco casos ... 289
135. Medida experimental del desfase ... 293
136. Interferencia de dos vibraciones ... 294
137. Característica dinámica de una válvula amplificadora de radio. 298
138. Elipse de inercia ... 299
139. Otro método de hallar la elipse de inercia ... 303

Lista recapitulativa de las fórmulas del Tomo VI ... 307

Ejercicios y problemas a resolver ... 319

GEOMETRIA ANALITICA PLANA Y APLICACIONES DIVERSAS

1. Objeto de la geometría analítica plana. — La geometría analítica plana tiene por objeto la aplicación del álgebra y cálculo diferencial a la geometría plana, es decir al estudio de las propiedades de las diferentes curvas y a su construcción.

Se basa en los principios siguientes:

1.° Un lugar geométrico se puede representar por una ecuación entre la abscisa x y la ordenada y de un punto cualquiera,

2.° una ecuación entre la abscisa x y la ordenada y de un punto cualquiera del plano es representada por una curva,

3.° dos ecuaciones entre x e y representan uno o varios puntos.

Las curvas se representan por ecuaciones, y si las coordenadas se han elegido adecuadamente, la ecuación es la traducción de la definición geométrica.

— Supondremos, evidentemente, que el lector conoce no solamente la geometría elemental, sino también el álgebra elemental (comprendidos el primero y segundo grado, así como las derivadas que habrá podido estudiar en el tomo I de este curso), la representación cartesiana y el cálculo diferencial (ver el tomo II).

Designaremos por x e y las coordenadas generales de un punto cualquiera, variable, a lo largo de una curva, mientras que las de un punto fijo vendrán afectadas por un subíndice, es decir, serán (x_0, y_0), $(x_1\, y_1)$, etc.

CAPITULO PRIMERO

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE ALGUNAS CURVAS FUNDAMENTALES Y CLASICAS

2. Ecuaciones de la elipse. — Supongamos que su centro se encuentra en el origen de coordenadas (fig. 1).

DEFINICIÓN. — La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

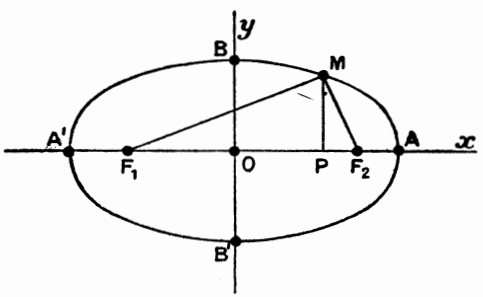

FIG. 1

— Sean F_1 y F_2 los focos y M un punto cualquiera tal que

$$MF_1 + MF_2 = \text{constante} = 2a, \qquad (1)$$

siendo la constante $2a$ mayor que la distancia entre focos; por otra parte, $2a$ es la longitud del eje mayor AA′ de la elipse, ya que cuando M coincide con A, se verifica que $AF_2 + AF_1 = 2a$, y como:

$$AF_2 = A'F_1, \quad \text{resulta} \quad AA' = 2a.$$

Llamemos $2c$ a la distancia entre focos y tracemos la perpendicular MP. Si x e y son las coordenadas del punto M se tendrá:

$$\overline{MF_2}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF_2}^2 = y^2 + (c - x)^2$$

y

$$\overline{MF_1}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF_1}^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), obtenemos

$$\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a$$

o

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + [y^2 + (c - x)^2] - 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2}$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2}$$

o

$$a^2 - cx = a\sqrt{y^2 + (c - x)^2},$$

elevando al cuadrado

$$a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx = a^2[y^2 + (c - x)^2] = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Hagamos

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{(ya que } a > c\text{)},$$

y sustituyendo la ecuación anterior, se obtiene

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

que al dividir por a^2b^2, se encuentra la ecuación bien conocida de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De aquí se deduce que si M coincide con B ($x = 0$) resulta $y = b$, lo que indica que el eje vertical BB′ tiene por longitud $2b$.

Observación I. — La relación entre la longitud $2c$, distancia entre focos, y la longitud del eje mayor $2a$ se llama *excentricidad*

$$\frac{F_1F_2}{AA'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = e, \quad \text{entonces} \quad e < 1.$$

— Obsérvese también que al haber hecho $a^2 - c^2 = b^2$, se obtiene

$$a^2 = b^2 + c^2$$

y, por tanto, a es la hipotenusa del triángulo rectángulo, cuyos catetos son OF_2 y el semieje menor OB, lo que es evidente «a priori» cuando M coincide con B.

Observación II. — Si $a = b$, la elipse se transforma en una circunferencia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

o bien

$$x^2 + y^2 = a^2$$

de radio a.

Tracemos ahora la circunferencia de radio a, que se llama *círculo principal* de la elipse, y la elipse anterior (de mismo centro O). Llamemos y_e a la ordenada de un punto de la elipse e y_c a la de la circunferencia, correspondiente a una misma abscisa x (fig. 2).

La elipse nos proporciona

$$y_e^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

y la circunferencia

$$y_c^2 = (a^2 - x^2).$$

Eliminando $a^2 - x^2$ entre ambas resulta:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot y_c^2$$

de donde $\dfrac{y_c}{y_e} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2a}{2b}$

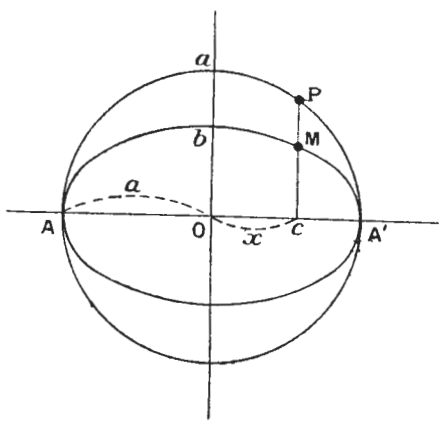

FIG. 2

Por tanto, la relación entre la ordenada del círculo a la de la elipse es igual a la que existe entre las longitudes del eje mayor al menor

3. Elipse considerada como proyección de un círculo. — En la observación II hemos obtenido

$$\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b} = \text{constante (cualquiera que sea } x).$$

Ya que $b < a$, hagamos

$$\frac{b}{a} = \cos\varphi$$

y supongamos que se haga girar, en la figura 2, el plano de la circunferencia alrededor del eje Ox un ángulo φ tal que

$$\cos \varphi = \frac{b}{a}$$

el punto M de la elipse es entonces la proyección horizontal del punto correspondiente P en el espacio, y como se verifica

$$MC = PC \cdot \cos \varphi,$$

resulta que la elipse es la proyección octogonal, sobre un plano horizontal, de una circunferencia trazada sobre un plano oblicuo.

4. Trazado de la elipse. — La ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

da

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

o bien

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Consideremos la raíz positiva de y, y tracemos la curva correspondiente. A la raíz negativa le corresponderá la curva simétrica.

Se observa que y no es real más que cuando

$$-x^2 + a^2 > 0 \quad \textit{de donde} \quad -a < x < +a.$$

La derivada es

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Que es nula para $x = 0$, e $y' = \infty$ para $x = \pm a$.

Entonces

$$y' \text{ es } > 0 \quad \text{si } x < 0, \quad \text{e } y \nearrow,$$
$$y' \text{ es } < 0 \quad \text{si } x > 0, \quad \text{e } y \searrow,$$

que expresado en forma de tabla

x	$-a$		0		$+a$
y'	∞	$+$	0	$-$	∞
y	0	$\nearrow$	b (max.)	$\searrow$	0

5. Elipsógrafo. — Consideremos en la figura 3 una escuadra OTT' y una recta CA de longitud constante que se desplaza sobre ésta, de tal manera que los puntos B y C describen los lados del ángulo recto. Hallemos el lugar geométrico descrito por el punto A.

Sea BA = b y CA = a. Al tomar como variable el ángulo ABD = φ se tiene:

$$DA = y = AB \operatorname{sen} \varphi = b \cdot \operatorname{sen} \varphi$$
$$OD = x = CA \cos \varphi = a \cdot \cos \varphi.$$

Tracemos por O una paralela a CA, prolonguemos DA hasta F y dibujemos el arco de círculo EF de centro 0. El ángulo φ se designa con el nombre de anomalía excéntrica de la elipse.

El lugar de A es entonces una elipse.

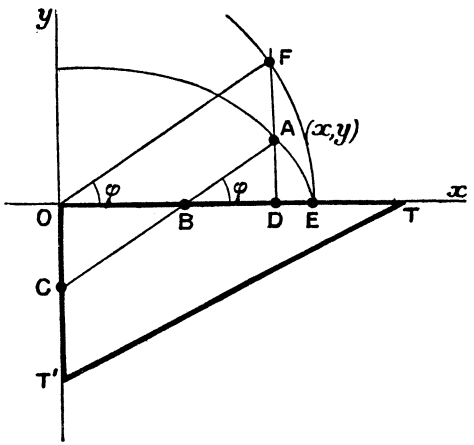

FIG. 3

6. Hipérbola. — La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante.

DEFINICIÓN. — *La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos* M, *cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos* F_1 *y* F_2, *llamados focos, es constante.*

$$MF_1 - MF_2 = \text{constante} = 2a, \qquad (1)$$

Si M coincide con el vértice S, como $SF_2 = S'F_1$, resulta que la distancia entre los dos vértices es igual a $2a$.

$$SS' = 2a.$$

Bajemos la perpendicular MP, y llamemos $2c$ a la distancia entre focos

$$F_1F_2 = 2c \qquad (c > a)$$

Llamando x e y a las ordenadas del punto M, se tendrá:

$$\overline{MF_1}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{F_1P}^2 = y^2 + (c + x)^2$$

$$\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{F_2P}^2 = y^2 + (x - c)^2.$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y elevando al cuadrado

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a$$

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + [y^2 + (x - c)^2] + 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

o bien $$cx - a^2 = a\sqrt{y^2 + (x - c)^2}.$$

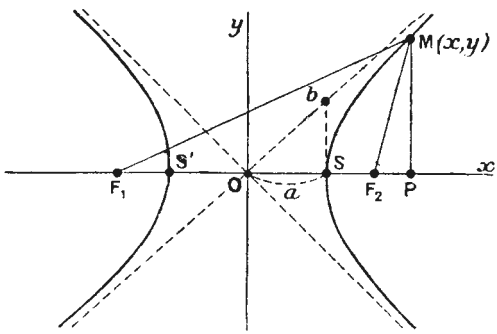

FIG. 4

Elevando al cuadrado

$$a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx = a^2[y^2 + (x - c)^2] = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx$$

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)x^2 = -a^2(c^2 - a^2),$$

haciendo

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad \text{(ya que } a < c\text{)}$$

de donde

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

dividiendo por $-a^2b^2$, se obtiene la ecuación de la hipérbola

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Más adelante veremos cuál es el significado geométrico de b: una hipérbola tal tiene dos asíntotas que pasan por O, y deduciremos que sus pendientes son $+\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$.

A la relación $e = \frac{F_1F_2}{SS'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ se denomina con el nombre de *excentricidad* e de la hipérbola ($e > 1$).

Por otra parte, se tiene $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2}$, que muestra que para que $x^2 - a^2$ sea positivo, se debe verificar $-a > x > a$.

También se puede escribir

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

en la que si x tiende a infinito, $\frac{a^2}{x^2}$ tiende a 0 e y a infinito, y se tiene

$$\text{límite de } \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

por consiguiente las dos rectas

$$y = +\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

son las asíntotas. También se deduce que si $x = a$, $y = b$, y por tanto b es la ordenada de la asíntota para $x = a$ en el vértice S.

— Por último, si $a = b$, las asíntotas son perpendiculares entre sí, siendo entonces las bisectrices de los cuatro cuadrantes: se tiene entonces una *hipérbola equilátera*, cuya ecuación es

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{o} \quad x^2 - y^2 = -a^2$$

7. Trazado de la hipérbola. — Consideremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y despejando y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{1}$$

que para que sea real, es necesario que

$$x^2 - a^2 > 0, \quad \text{de donde} \quad -a > x > a.$$

Hallemos *directamente* las asíntotas, ya que

$$\text{para} \quad x = \pm \infty, \quad y = \pm \infty.$$

Tenemos

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

estudiemos esta función si $x \to \infty$, $\frac{a^2}{x^2}$ es un infinitésimo.

Desarrollemos la raíz por la fórmula del binomio de NEWTON (ver Tomo II):

$$y = \frac{b}{a} x \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{b}{a} x \left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{a^4}{x^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{b}{a} x - \frac{ab}{2x} + \dots$$

Consideremos la recta $y = \frac{b}{a} x$, la curva tiende a confundirse con ella si $x \to \infty$, *siendo entonces esta recta la asíntota.*

La curva está por *debajo* de la asíntota, ya que tiene el término sustractivo $-\frac{ab}{2x}$.

Más adelante estudiaremos el método general para hallar las asíntotas de una curva cualquiera (capítulo VI).

Calculemos la derivada. Tomando los valores positivos de y se tiene:

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

que se anula para $x = 0$, y se hace infinita para $x = \pm a$. Por último, tiene el signo de x:

$$\text{si } x > 0 \quad y' > 0 \quad \text{y} \quad y \searrow,$$
$$\text{si } x < 0 \quad y' < 0 \quad \text{y} \quad y \nearrow,$$

se tendría así la tabla que da la curva por encima del eje de las x:

x	$-\infty$		$-a$	$+a$		$+\infty$
y'	$-\frac{b}{a}$	$-$	∞	∞	$+$	$+\frac{b}{a}$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

Al considerar la raíz negativa (ecuación 1), se tendrán las mismas variaciones, simétricas, lo que da la curva de la hipérbola (fig. 4).

— Al eje horizontal. que es el eje focal, se le llama *eje transverso* y al eje vertical *eje no transverso,* en el caso de la curva anterior.

La hipérbola conjugada es aquella que, teniendo la misma distancia focal, tiene por eje transverso el eje no transverso de la otra, e inversamente. El eje de las x de una es el eje de las y de la otra, e inversamente; a de la una corresponde a b de la otra, e inversamente, lo que da para la hipérbola conjugada la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

o

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = -1.$$

Los ejes son los mismos, así como las asíntotas y la distancia focal, pero el eje focal de una corresponde al eje no focal de la otra y recíprocamente. Esta curva corresponde a la punteada de la figura 5.

8. Parábola. — Tomemos como origen O el vértice de la parábola cuyo eje horizontal se considera como eje de abscisas (fig. 6).

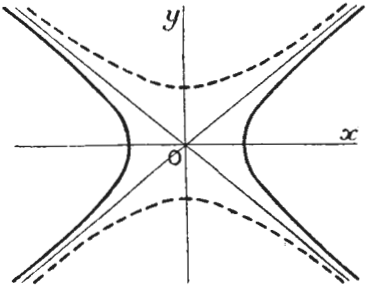

FIG. 5

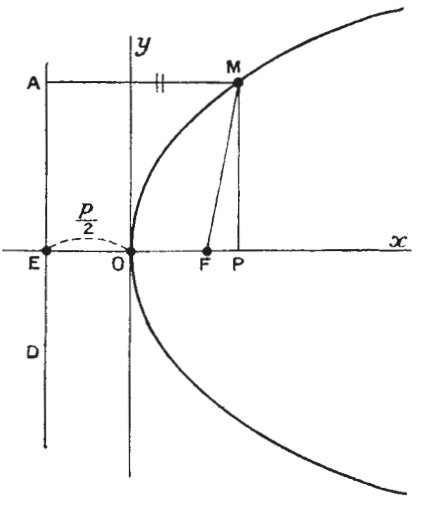

FIG. 6

DEFINICIÓN. — *La parábola es el lugar geométrico de los puntos* M *equidistantes de un punto fijo* F, *llamado foco, y de una recta* D *llamada directriz:*

$$MA = MF. \tag{1}$$

Si el punto M coincide con O se deduce que OF = OE

— Llamemos p a la distancia del foco a la directriz.

Se tendrá

$$\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

y como

$$MA = x + \frac{p}{2}$$

La fórmula (1) nos proporciona entonces

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

de donde

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$$

y por último

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

que es la ecuación de la parábola.

Una parábola de eje vertical tendría por ecuación

$$y = Kx^2.$$

9. Trazado de la parábola. Sea $y^2 = 2px$.

Se tiene

$$y = \pm \sqrt{2px},$$

y es necesario que se verifique $2px > 0$, y si p es positivo, se tendrá $x > 0$.

La derivada es (al considerar el signo + ante y)

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$$

que no se anula más que para $x = \infty$.

Para $x = 0$, $y' = \infty$, y siendo y' positiva, y crece continuamente, y de aquí la tabla:

x	0			$+\infty$
y'	∞	+	+	0
y	0	↗	↗	$+\infty$

Si p fuera negativo, la parábola estaría girada a la izquierda, ya que sería preciso se tuviera $x < 0$.

Así se obtiene la curva de la figura 6.

10. La cisoide (fig. 7.) — Consideremos el círculo de diámetro OA, sea O el origen y tracemos la tangente en A.

Tracemos una recta cualquiera OE y llevemos un segmento OP tal que

$$OP = BE;$$

cuando la recta OE gira alrededor de O 90° partiendo del eje de las x, el lugar geométrico del punto P es la curva C llamada *cisoide*, que tiene dos ramas simétricas.

— Sea $2a$ el diámetro del círculo, y α el ángulo que forma la recta OE con el eje OA considerado como eje de las x.

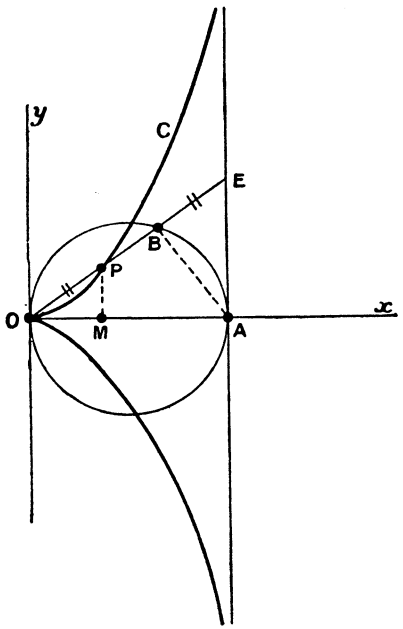

FIG. 7

Se tiene

$$OA = 2a = OE \cdot \cos \alpha$$

y

$$OB = 2a \cos \alpha$$

de donde

$$BE = OE - OB = \frac{2a}{\cos \alpha} - 2a \cos \alpha$$

entonces

$$OP = 2a \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Llamemos x e y a las coordenadas del punto P, se tendrá

$$x = OM = OP \cos \alpha = 2a(1 - \cos^2 \alpha) = 2a \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Por otra parte

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

que al sustituir en x:

$$x = 2a \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

de donde:

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

$$y^2(2a - x) = x^3$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

e

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

que es la ecuación de la *cisoide*; muestra ésta que se debe tener

$$0 \leqslant x \leqslant 2a,$$

lo que indica que tiene la *cisoide* dos ramas simétricas.

11. La estrofoide. — Consideremos los dos ejes Ox y Oy y un punto M sobre el eje de las x. Tracemos una oblicua MB, y, desde el punto B, llevemos dos segmentos BC y BC′ iguales a BO. Hallemos el lugar geométrico de los puntos C y C′ (fig. 8).

— Sea θ el ángulo que forma la oblicua con el eje de las x, y sea ρ el radio vector MC′ o MC.

$$\rho = \text{MB} \pm \text{BO}.$$

Llamando a a la distancia del punto M al origen O, se tendrá

$$a = \text{MB} \cos\theta \quad \text{y} \quad \text{BO} = a \operatorname{tg}\theta,$$

de donde

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm a \operatorname{tg}\theta = a\left(\frac{1 \pm \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) \quad (1)$$

que constituye la ecuación polar de la curva que encierra las dos ramas de la figura.

El lugar geométrico de los puntos C y C′ se llama *estrofoide*.

— La ecuación se puede expresar en coordenadas cartesianas: en el triángulo MCD se tiene, al llamar x e y a las coordenadas del punto C:

$$a + x = \text{MD} = \rho\cos\theta \text{ e } \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

así como

$$\rho^2 = \overline{\text{MC}}^2 = (a + x)^2 + y^2.$$

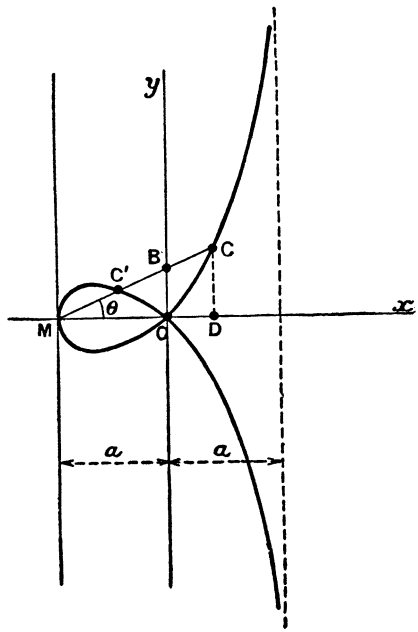

FIG. 8

Sustituyamos los valores de $\cos\theta$ y de $\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación (1):

$$\rho = \frac{a}{a + \rho} \cdot \rho \left(1 \pm \frac{y}{\rho}\right)$$

de donde:

$$a + x = a\left(\frac{\rho \pm y}{\rho}\right)$$

$$\rho(a + x) = a\rho \pm ay$$

o

$$\rho x = \pm ay$$

$$\rho^2 x^2 = a^2 y^2,$$

o al sustituir ρ^2 por su valor:

$$[(a+x)^2+y^2]x^2 = a^2y^2$$
$$(a+x)^2x^2+y^2x^2 = a^2y^2$$
$$y^2(a^2-x^2) = (a+x)^2x^2$$
$$y^2(a-x) = (a+x)x^2$$

e

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

que es la ecuación buscada.

Entonces, es necesario que se verifique

$$\frac{a+x}{a-x} > 0$$

o

$$\frac{a^2-x^2}{(a-x)^2} > 0$$
$$a^2-x^2 > 0$$

lo que exige $-a < x < a$.

Partiendo de la ecuación anterior que da y, tomando valores particulares y calculando la derivada, puede hallar el lector fácilmente la forma de la curva, lo que ya hicimos en la página 158 del tomo I como ejemplo de trazado de curvas.

12. Lemniscata de Bernoulli. — *Es el lugar geométrico de los puntos* M *tales que el producto de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es igual al cuadrado de la semidistancia entre ambos.*

— Sean F_1 y F_2 los dos focos, y

$$F_1F_2 = 2a,$$

se tendrá

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2. \qquad (1)$$

Llamemos x e y a las coordenadas de un punto M cualquiera. Los triángulos F_1MP y F_2MP nos proporcionan

$$\overline{MF_1}^2 = y^2 + (x+a)^2$$
$$\overline{MF_2}^2 = y^2 + (x-a)^2,$$

llevemos estos valores a la ecuación (1) y elevémoslos al cuadrado

$$[y^2 + (x + a)^2][y^2 + (x - a)^2] = a^4$$
$$y^4 + (x + a)^2(x - a)^2 + y^2[(x + a)^2 + (x - a)^2] = a^4$$
$$y^4 + (x^2 - a^2)^2 + y^2(2x^2 + 2a^2) = a^4$$

o

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^4) = 0$$

que es la ecuación de la *lemniscata*, y es de cuarto grado. La estudiaremos con detalle en el capítulo dedicado a la construcción de curvas y veremos que tiene la forma de la figura 10 (ver pág. 278).

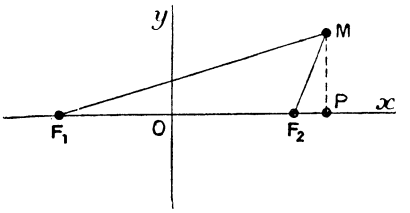

FIG. 9

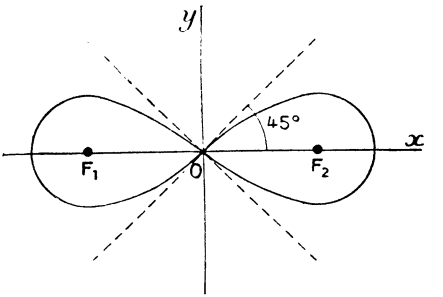

FIG. 10

13. La cicloide. — En el tomo III, § 50, hemos establecido la ecuación paramétrica de la *cicloide*

$$\begin{cases} x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

La segunda ecuación da

$$\cos\theta = 1 - \frac{y}{R},$$

de donde

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2} = \sqrt{2\frac{y}{R} - \frac{y^2}{R^2}}$$
$$= \pm\frac{1}{R}\sqrt{2Ry - y^2}$$

tomando el signo + si $\theta < \pi$, y el signo — si $\theta > \pi$.

Sustituyamos estos valores en x:

$$x = \mathrm{R} \arccos \frac{\mathrm{R} - y}{\mathrm{R}} \pm \sqrt{2\mathrm{R}y - y^2}$$

se obtiene así x en función de y.

CAPITULO II

DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS Y CAMBIO DE EJES DE COORDENADAS

14. Sistemas de coordenadas. — Existen tres sistemas de coordenadas que se utilizan para representar las funciones y las curvas, y según los casos se emplea uno u otro de esos sistemas, pues, frecuentemente, se simplifica el estudio de la función o el trazado de las curvas:

1.° *Coordenadas cartesianas,* bien conocidas, en que un punto P del plano está determinado por su abscisa x y por su ordenada y (fig. 11). La ecuación viene dada entonces, bien en forma explícita $y = f(x)$, o en forma implícita $f(x, y) = 0$.

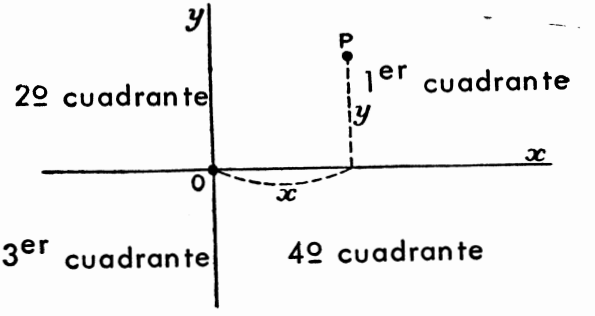

FIG. 11

Recordaremos también, que una curva cerrada se puede recorrer de dos maneras:

— *en sentido directo,* sentido inverso de las agujas de un reloj,

— *en sentido retrógrado,* sentido de las agujas de un reloj.

2.° *Coordenadas polares,* en donde la posición de un punto P del plano viene determinada por su distancia ρ a un punto fijo O, llamado *polo,* y por el ángulo que forma este radio vector con un cierto origen (fig. 12) que suele ser la línea horizontal que parte de O hacia la derecha

$$\rho = f(\theta)$$

3.° *Coordenadas paramétricas,* en que la posición de un punto P viene dado por su abscisa x y su ordenada y, pero cada una de ellas viene expresada en función de un parámetro, que suele ser un ángulo θ o bien el tiempo t.

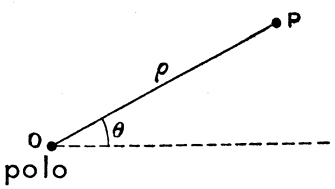

FIG. 12

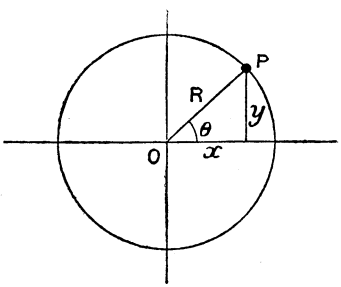

FIG. 13

Así, por ejemplo, un punto P de la circunferencia, cuyo centro está en el origen de coordenadas (fig. 13), se expresará por

$$\left| \begin{array}{l} x = \mathrm{R}\cos\theta \\ y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right.$$

Para un proyectil, describiendo una cierta trayectoria, x e y se expresarán en función del tiempo t.

— Con frecuencia, suele ser conveniente transformar la ecuación de una curva según uno u otro de los sistemas de coordenadas. Esto es lo que veremos a continuación.

15. Cambio de ejes de coordenadas. — Por ciertas razones, que son casos particulares y que serán comprendidos más adelante, hay que cambiar los ejes de coordenadas por necesidad, es decir desplazarlos *cambiando la posición del origen,* e incluso tomando nuevos ejes, no paralelos a los primitivos, por ejemplo haciendo una rotación a los ejes de coordenadas. Suelen obtenerse así, ecuaciones más simples, como lo veremos al estudiar las cónicas.

Con este objeto se van a establecer dos grupos de fórmulas muy simples.

Cambio de origen. — Supongamos que los ejes Ox y Oy se mantienen paralelos a sí mismos (fig. 14). Se trata simplemente de desplazar el origen O a un nuevo punto O′.

— Sean x e y las coordenadas de un punto P en el sistema primitivo de origen O, y X e Y las del mismo punto P en el nuevo sistema de origen O′. Por último, llamemos x_0 e y_0 a las coordenadas del nuevo origen O′ en el sistema inicial de ejes Ox y Oy (x_0 e y_0 pueden ser positivos o negativos).

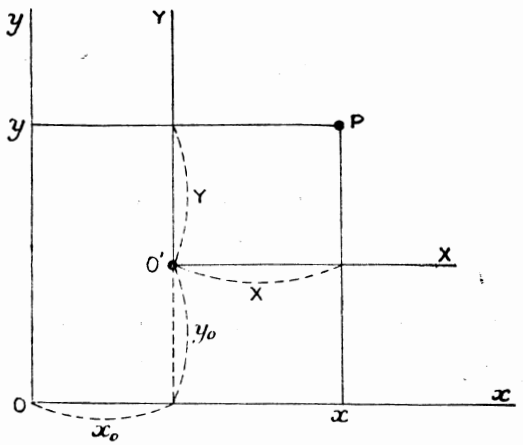

FIG. 14

La figura 14 da inmediatamente, para un punto P cualquiera,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}}$$

Inversamente se deducen las nuevas coordenadas con relación a las antiguas:

$$X = x - x_0 \quad \text{e} \quad Y = y - y_0.$$

Consecuencias. — De lo anterior se deduce que toda ecuación de la forma:

1.° $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ representa un círculo

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

cuyo centro tiene por coordenadas x_0 e y_0.

2.° $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ representa una elipse cuyos ejes son $2a$ y $2b$ y cuyo centro está situado en x_0 e y_0, permaneciendo sus ejes paralelos a los de coordenadas.

3.° $(y-y_0)^2=2p\,(x-x_0)$ representa una parábola de eje horizontal y cuyo vértice está situado en x_0 e y_0.

Así se ve como pueden generalizarse esas transformaciones a todas las curvas.

16. Ejemplos.

1.° *Sea un punto de coordenadas* (4, —2). *Si se desplaza el origen a un punto O' cuyas coordenadas son* (1, —3), *¿cuáles serán las nuevas coordenadas del punto?*

— Se tiene

$$x=4 \qquad y=-2$$
$$x_0=1 \qquad y_0=-3$$

de donde

$$\left|\begin{array}{lll} x=x_0+\mathrm{X}, & \text{o sea} & 4=1+\mathrm{X} \\ y=y_0+\mathrm{Y}, & \text{o sea} & -2=-3+\mathrm{Y}. \end{array}\right.$$

De aquí

$$\mathrm{X}=3 \quad \text{e} \quad \mathrm{Y}=1.$$

2.° *Sea la ecuación*

$$y^2-2y-4x-2=0$$

que es una parábola. Hallar el vértice S *y foco* F.

$$y^2-2y+1=4x+2+1$$

o

$$(y-1)^2=4\left(x+\frac{3}{4}\right)$$

o

$$\mathrm{Y}^2=4\mathrm{X}^2,$$

parábola cuyo vértice tiene por coordenadas

$$y_0=1 \qquad \text{y} \qquad x_0=-\frac{3}{4}.$$

La ecuación del eje es entonces

$$y-1=0.$$

Por otra parte se tiene

$$2p = 4 \qquad \text{o} \qquad p = 2$$

entonces las coordenadas del foco son

$$x_F = +\frac{5}{4} \qquad e \qquad y_F = 1$$

3.° *La ecuación* $3y^2 + 4x^2 - 8x + 12y + 4 = 0$ *es una elipse. Determinar las coordenadas del centro y las longitudes de sus ejes.*

— Se puede escribir, haciendo aparecer cuadrados perfectos:

$$4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 12$$

o

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

o bien

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{4} = 1,$$

que, en efecto, es una elipse de semiejes

$$a = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad b = 2$$

siendo las coordenadas del centro

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = -2.$$

Inversamente, conociendo las coordenadas de ambos focos así como a y b se podría determinar inmediatamente la ecuación de la elipse.

4.° *Sea la curva* $y^2 - 2y - 3x - 5 = 0$. *Hallar su transformada al desplazar el origen al punto* $O'(-2, +1)$.

Se tiene

$$x = -2 + X \qquad \text{e} \qquad y = 1 + Y,$$

de donde

$$(1+Y)^2 - 2(1+Y) - 3(-2+X) - 5 = 0$$

$$Y^2 - 3X = 0,$$

que es una parábola.

Aquí se ve la forma simple que toma la ecuación.

Entonces, todo depende de la elección del nuevo origen, y se puede elegir x_0 e y_0 para que la ecuación tome una forma simple, o mejor todavía, para suprimir ciertos términos *molestos* de la ecuación inicial, como vamos a ver en el ejemplo siguiente.

5.° *Sea la ecuación* $y^2 - 2x^2 + y + 3x + 1 = 0$. *Elegir el nuevo origen* O′ *de forma tal que la ecuación no contenga más que términos de primer grado.*

— Se tiene

$$x = x_0 + X$$
$$y = y_0 + Y,$$

lo que da

$$(y_0 + Y)^2 - 2(x_0 + X)^2 + (y_0 + Y) + 3(x_0 + X) + 1 = 0,$$

$$Y^2 - 2X^2(2y_0 + 1) + X(-4x_0 + 3) + (y_0^2 - 2x_0^2 + y_0 + 3x_0 + 1) = 0;$$

anulemos entonces los coeficientes de Y y de X

$$\left|\begin{array}{ll} 2y_0 + 1 = 0 & \text{de donde} \quad y_0 = -\dfrac{1}{2} \\ -4x_0 + 3 = 0 & \qquad\qquad x_0 = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Se obtiene entonces

$$Y^2 - 2X^2 + (y_0^2 - 2x_0^2 + y_0 + 3x_0 + 1) = 0$$

$$Y^2 - 2X_0 + \left(\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + 1\right) = 0$$

o bien

$$Y^2 - 2X^2 + \frac{15}{8} = 0,$$

que es la ecuación buscada.

17. Rotación de ejes. — Hagamos girar ahora los ejes Ox y Oy un ángulo α cualquiera (que será conocido o no), y sean OX y OY los nuevos ejes, perpendiculares siempre entre sí (fig. 15). Se tiene

$$OM = x \qquad PM = y$$
$$OM' = X \qquad PM' = Y.$$

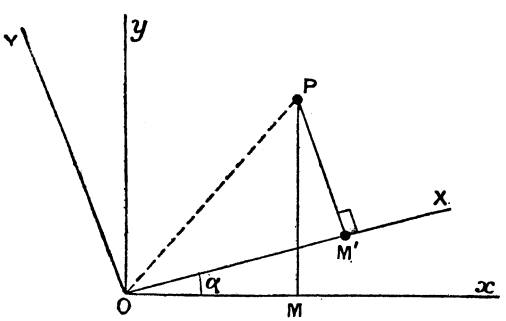

FIG. 15

Proyectemos la línea quebrada OM'P sobre Ox:

$$\text{proy OP} = \text{proy OM'} + \text{proy M'P}$$

$$\text{OM} = \text{OM'} \cos \alpha + \text{M'P} \cos (\alpha + 90°)$$

$$\boxed{x = \text{X} \cos \alpha - \text{Y} \operatorname{sen} \alpha}$$

Igualmente, proyectemos la línea quebrada OM'P sobre Oy:

$$\text{proy OP} = \text{proy OM'} + \text{proy M'P}$$

$$\text{PM} = \text{OM'} \operatorname{sen} \alpha + \text{M'P} \cos \alpha$$

o

$$\boxed{y = \text{X} \operatorname{sen} \alpha + \text{Y} \cos \alpha}$$

Transformación inversa. Si se quisiera, inversamente, pasar de los nuevos ejes a los antiguos, se despejaría X e Y de ambas ecuaciones en x y en y, lo que da

$$\boxed{\begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ Y &= -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}}$$

18. Ejemplos.

1.° *Sea la ecuación* $xy = 10$, *girar los ejes* 45°, *y hallar la nueva ecuación.*

— Se tendrá

$$x = \text{X} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \text{Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{X} - \text{Y}}{\sqrt{2}}$$

$$y = \text{X} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{X} + \text{Y}}{\sqrt{2}}.$$

La ecuación que se obtiene es

$$\left(\frac{\text{X} - \text{Y}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{\text{X} + \text{Y}}{\sqrt{2}}\right) = 10$$

o bien

$$\text{X}^2 - \text{Y}^2 = 20.$$

2.° *Sea la ecuación* $y^2 - 2xy - 3x^2 + 1 = 0$. *Girar los ejes un cierto ángulo para que la ecuación carezca de términos en* xy.

— Sustituyendo x e y, obtenemos

$$(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha)^2 - 2(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha)(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha) - 3(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha)^2 + 1 = 0$$

y al ordenar los términos

$$X^2(\operatorname{sen}^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) + Y^2(\cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) + 2XY(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) + 1 = 0.$$

Anulemos el término en XY, con lo cual

$$\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$$

o bien

$$-\cos 2\alpha + 2 \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha \approx 27° \quad \text{y} \quad \alpha \approx 13°30'.$$

Deduciendo los valores de sen α y de cos α y sustituyéndolos en la ecuación, se obtiene finalmente

$$-3{,}23\, X^2 + 1{,}23\, Y^2 + 1 = 0.$$

Es necesario remarcar que al existir dos ángulos cuya tangente es 1/2, tenemos dos valores para el ángulo α, pero es fácil ver que esos dos ángulos (complementarios) determinan dos sistemas de ejes perpendiculares entre sí, que son los nuevos ejes buscados.

Volveremos sobre este último punto cuando estudiemos más adelante la reducción de las cónicas.

NOTA. — *Emplearemos todas las transformaciones anteriores de coordenadas cuando se estudie la reducción de cónicas, pero se deduce ya de los ejemplos anteriores que, si se tiene una ecuación de segundo grado en* x *y en* y, *pueden hacerse desaparecer los términos de primer grado trasladando el origen a otro punto y permaneciendo los ejes paralelos; por último, se puede eliminar el término en* xy *haciendo girar los ejes un ángulo* α *conveniente, que vamos a aprender a calcular directamente.*

19. Transformación de coordenadas polares a cartesianas (fig. 16). Consideremos el polo O como origen, y el eje polar Ox como eje de abscisas. Se deduce inmediatamente

$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad (1)$$

o bien

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\rho}.$$

Por otra parte

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad (2)$$

siendo conocido el ángulo θ o su suplementario.

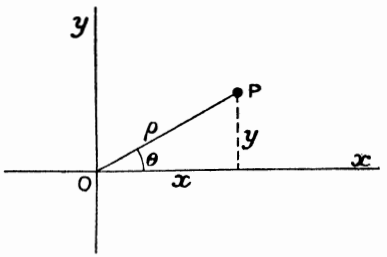

FIG. 16

Estas fórmulas permiten entonces el paso de un sistema a otro.

20. Diversos ejemplos de cambios de coordenadas:

1.° *Hallar la ecuación del círculo* $x^2 + y^2 = 16$ *en coordenadas polares.*

—Las ecuaciones (1) sustituidas en la ecuación, nos proporcionan

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 16$$

o bien

$$\rho^2 = 16 \qquad \text{y} \qquad \rho = 4 = \mathrm{R}.$$

que es la ecuación polar del círculo de radio 4, y cuyo centro está en el polo.

2.° *Hallar la ecuación de la lemniscata*

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

en coordenadas cartesianas

Se tiene

$$\rho^2 = a^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta),$$

y, al multiplicar ambos miembros por ρ^2

$$\rho^4 = a^2(\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta).$$

o, teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (2)

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

que es la ecuación buscada.

3.° *Sea la curva paramétrica*

$$y = 3t - t^3 \qquad x = 1 - 3t^2.$$

Se pide expresarla en

a) *coordenadas cartesianas,*

b) *coordenadas polares*

— *En cordenadas cartesianas*: se tiene

$$t^2 = \frac{1-x}{3} \qquad \text{e} \qquad y = t(3 - t^2) = t\left(3 - \frac{1-x}{3}\right)$$

de donde

$$t = \frac{3y}{8+x},$$

y al sustituir este valor en la expresión de t^2 anterior:

$$\left(\frac{3y}{8+x}\right) = \frac{1-x}{3}$$

o finalmente

$$27y^2 - (8+x)^2(1-x) = 0.$$

— *En coordenadas polares*: se tiene

$$x = \rho \cos \rho \qquad \text{e} \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Haciendo $t = \operatorname{tg} \varphi$, se tiene también

$$\begin{aligned} \rho^2 = x^2 + y^2 &= (1-3t^2)^2 + (3t - t^3)^2 \\ &= 1 + 9t^4 - 6t^2 + 9t^2 + t^6 - 6t^4 \\ &= t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1 = (1+t^2)^3 \\ &= (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^3 = \frac{1}{\cos^6 \varphi}, \end{aligned}$$

de donde

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 \varphi}.$$

Hallemos la relación entre θ y φ para calcular $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$. Se tiene

$$\begin{aligned} \cos \theta = \frac{x}{\rho} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1-3t^2}{(1+\operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2}} \\ &= \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1+\operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{1}{[\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}]^3} - \frac{3\operatorname{tg}^2 \varphi}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \rho}} \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \cos \varphi = \cos 3\varphi. \end{aligned}$$

Entonces

$$x = \rho \cos \theta = \frac{1}{\cos^3 \varphi} \cdot \cos 3\varphi.$$

Análogamente se encuentra

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen} 3\varphi}{\cos^3 \varphi},$$

pues $\theta = 3\varphi$, y

$$\rho^2 = \left(\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi}\right)^2 = \frac{1}{\cos^6 \varphi}$$

o bien

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}} = f(\theta)$$

que es la ecuación de la curva en coordenadas polares.

21. Aplicación de las fórmulas de cambio de origen a la ecuación general de las cónicas. — La elipse, hipérbola y parábola se llaman *cónicas*, y el porqué lo veremos en el capítulo VII.

Entonces, se puede dar desde ahora una definición general de las cónicas, definición que tendrá la ventaja de proporcionar una sola ecuación para las tres curvas.

DEFINICIÓN DE CÓNICA. *Una cónica es el lugar geométrico de los puntos* M *tales que la relación de distancias a un punto* F, *llamado foco, y a una recta* D, *llamada directriz, es constante:*

$$\frac{\text{MF}}{\text{MP}} = \text{constante} = e,$$

esta constante positiva e se llama excentricidad.

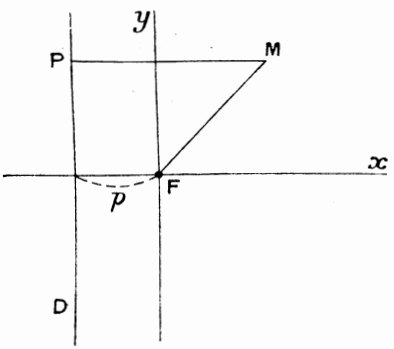

FIG. 17

— Consideremos el origen en el foco F (fig. 17), siendo el eje de las y paralelo a D, y el de las x perpendicular a D y dirigido hacia la derecha. Por último, sea p la distancia del foco a la directriz. La ecuación de la recta D es $x = -p$, la distancia del punto M a la recta D es $x + p$, y su distancia al foco es

$$\text{MF} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La ecuación de la curva será

$$\frac{MF}{MP} = e$$

o

$$\sqrt{x^2 + y^2} - e(x + p)$$

o bien

$$\boxed{x^2 + y^2 - e^2(x + p)^2 = 0}$$

Discusión. — Si se sustituye y por $-y$ la ecuación no varía, por tanto, la curva es simétrica respecto al eje de las x.

Corta al eje de las x en los puntos denominados focos, cuando

$$y = 0 \quad \text{y} \quad e(x + p) = \pm x. \tag{1}$$

1er Caso: $e = 1$, se vuelve a encontrar la definición de la parábola. Tiene un vértice único para $y = 0$ y $x = -\frac{p}{2}$. Traslademos el origen a ese punto sustituyendo x por $X - \frac{p}{2}$ e y por Y, con lo que obtenemos

$$\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2 - \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

o

$$Y^2 = 2pX,$$

que responde a la forma conocida (fig. 18).

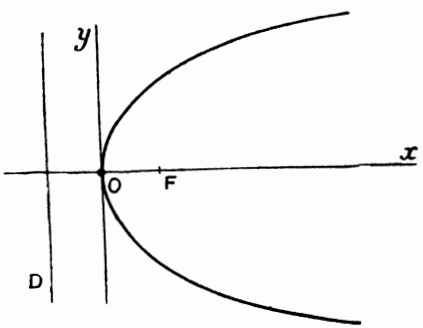

FIG. 18

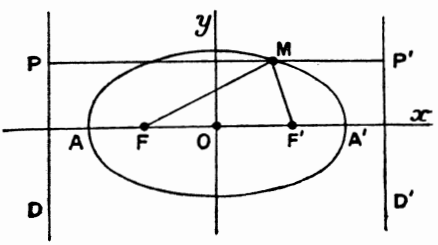

FIG. 19

2.° Caso: $e \neq 1$. La curva tiene dos vértices distintos, A y A′ (fig. 19), cuyas abscisas vienen dadas por la ecuación (1):
la primera con

$$e(x + p) = + x, \quad \text{de donde} \quad x_1 = \frac{ep}{1 - e},$$

la segunda con

$$e(x + p) = - x, \quad \text{de donde} \quad x_2 = \frac{ep}{-1 - e}.$$

La distancia entre estos dos vértices es, en *valor absoluto,*

$$\frac{ep}{1 - e} + \frac{ep}{-1 - e} = \frac{2e^2p}{1 - e^2}.$$

Desplacemos el origen en O a la mitad de esa recta,

$$AO = \frac{e^2p}{1 - e^2},$$

la ecuación se transforma en

$$\left(X + \frac{e^2p}{1 - e^2}\right)^2 + Y^2 - e^2\left(X + p + \frac{e^2p}{1 - e^2}\right)^2 = 0$$

o finalmente

$$(1 - e^2)\,X^2 + Y^2 - \frac{e^2p^2}{1 - e^2} = 0, \qquad (2)$$

la curva es, entonces, simétrica con relación al eje vertical que pasa por O (no hay términos en X). Entonces, existen un segundo foco F′ simétrico de F y una segunda directriz D′.

Pongamos

$$c = OF = OF' \quad \text{y} \quad a = OA = OA'$$

se tendrá, al considerar los valores absolutos de $1 - e^2$:

$$c = \frac{e^2p}{|1 - e^2|} \quad \text{y} \quad a = \frac{ep}{|1 - e^2|},$$

de donde se deduce

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad p = \left|\frac{a^2}{c} - c\right|,$$

y la ecuación (2) se transforma (ya que $\frac{c}{a} = e$):

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) X^2 + Y^2 - c \cdot p = 0$$

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) X^2 + Y^2 - (a^2 - c^2) = 0$$

y por último

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Inversamente, si $e = \frac{c}{a} \neq 1$, una ecuación tal representa una cónica, cuya forma depende del signo de $a^2 - c^2$, o bien del signo $e - 1$.

Existen dos casos:

1.° Si $e < 1$, $a^2 - c^2$ es > 0, pongamos

$$a^2 - c^2 = b^2$$

y deducimos la ecuación de la *elipse*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

y $\quad MF + MF' = 2a.$

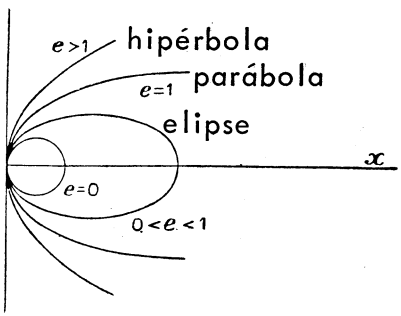

FIG. 20

2.° Si $e > 1$, $a^2 - c^2$ es < 0, se tiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{c^2 - a^2} = -1,$$

pongamos

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

y deducimos la ecuación de la *hipérbola*

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

con

$$MF - MF' = 2a.$$

La figura 20 muestra las diferentes formas de la curva, según los valores de e.

22. Generalidades sobre curvas. — Las curvas se dividen en dos categorías: *algebraicas y trascendentes*, según que la ecuación de la curva sea algebraica o trascendente, en coordenadas rectilíneas.

— Se llama función *algebraica* a una función explícita $y = f(x)$, o implícita $f(x, y) = 0$, en las que las operaciones a efectuar sobre la variable x son *adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, elevación a potencias o extracción de raíces.*

— Toda función que no es algebraica es *trascendente,* por ejemplo las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.

— Las curvas algebraicas se diferencian por el grado de su ecuación. Cierto es esto, ya que *el hecho de cambiar los ejes no puede modificar el grado de la ecuación.* Vamos a demostrarlo.

Teorema I. — *Una transformación de coordenadas rectilíneas no modifica el grado de la ecuación de una curva algebraica.*

— En efecto, supongamos que, habiendo eliminado los radicales y denominadores, la ecuación de la curva se presenta en la forma

$$f(x^p y^r) = 0 \quad \text{o} \quad \sum f(x^p y^r) = 0$$

siendo el grado de la curva $p + r = m$.

Al ser lineales las fórmulas de transformación de coordenadas (traslación o rotación de ejes), o sea de primer grado, su sustitución en los términos de la forma $x^p y^r$ dará un producto cuyo grado no puede ser superior a $p + r$, por consiguiente a m.

El grado no puede ser menor, pues basta razonar de forma análoga haciendo la transformación inversa.

Nota. — Una ecuación de grado m puede representar lugares geométricos de órdenes inferiores a m.

Por ejemplo, la ecuación de segundo grado

$$(2x + y - 1)(y - 4x) = 0$$

es satisfecha por las rectas

$$2x + y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad y - 4x = 0$$

Teorema II. — *Sean las ecuaciones de dos curvas*

$$f(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si se combinan ambas ecuaciones, bien por adición o sustracción, o incluso sumándolas después de haber multiplicado una de ellas por un factor constante K, la ecuación resultante

$$f(x, y) = K \cdot \varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

representa un lugar geométrico que pasa por los puntos de intersección de las curvas primitivas.

— En efecto, todo sistema de valores de x e y que satisfaga a las ecuaciones (1), satisface igualmente a la ecuación (2).

Teorema III. — *Una curva de grado m no puede ser cortada por una recta en más de m puntos.*

— Este teorema se basa en el célebre de DESCARTES, que dice que una ecuación de grado m tiene, a lo más, m raíces (reales o imaginarias). La demostración no se hará aquí.

— Admitido esto, sea $f(x, y) = 0$ la ecuación de la curva. Si hacemos $y = 0$, obtenemos la ecuación

$$f(x) = 0$$

cuyas raíces reales nos dan los puntos de intersección con el eje de las x; esta ecuación $f(x) = 0$, cuyo grado no sobrepasa a m, tiene a lo más m raíces, por tanto la curva no puede cortar al eje de abscisas en más de m *puntos*; y como se puede tomar por eje de las x una recta cualquiera sin que varíe el grado de la ecuación, esta conclusión es general, lo que demuestra el teorema.

23. Distancia entre dos puntos. — Consideremos el caso corriente de coordenadas cartesianas (fig. 21) y sean los puntos $P_1(x_1\, y_1)$ y $P_2(x_2\, y_2)$.

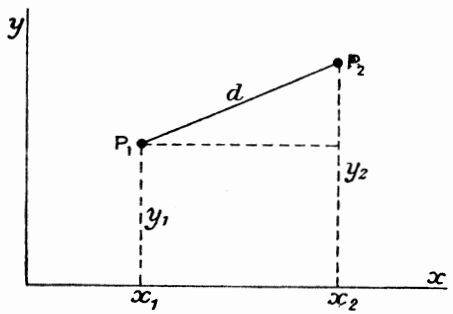

FIG. 21

La distancia d entre esos dos puntos es, evidentemente,

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Por supuesto, que deben tomarse las cuatro coordenadas con sus signos, importando poco el signo de cada paréntesis, ya que van elevados al cuadrado.

La expresión de d en coordenadas polares se obtiene fácilmente sustituyendo $x_1\, x_2\, y_1$ e y_2 por las fórmulas anteriores, obteniendo

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

CAPITULO III

ESTUDIO DE LA RECTA

24. Ecuación de la recta. — Se sabe ya, que una ecuación de primer grado en x e y representa una recta, pues se aprende en álgebra elemental. Existen tres formas de representar la ecuación de la recta y según los casos se considerarán una u otra de esas fórmulas:

Primera forma: $\boxed{y = mx + p}$ (fig. 22).

Es la expresión clásica, muy clara y cómoda, ya que se sabe (y no nos detendremos en su demostración por considerarla conocida por los lectores) que

— p es la ordenada en el origen

— m es la pendiente de la recta, $\boxed{m = \operatorname{tg} \alpha}$ siendo α el ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de las x.

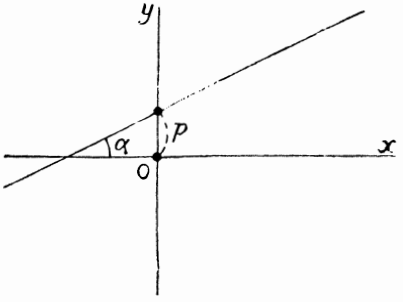

FIG. 22

Se conoce también (ver tomo I: *Derivadas*) que:

si m es positivo, la función es creciente,

si m es negativo, la función es decreciente.

Trazado práctico de la recta. — Se podría, conociendo p y m, buscar en las tablas el valor del ángulo α y trazar la recta con esta inclinación, pero no sería válido más que en el caso de que la escala de las x fuera la misma que las de las y, caso que no ocurre siempre.

Así, $y = 3x - 1$ es una recta que corta al eje de las y en la ordenada -1, y cuya pendiente es

$$\operatorname{tg} \alpha = 3 \qquad \text{de donde} \qquad \alpha \simeq 72°$$

Pero es mucho más cómodo, ya que una recta viene determinada por dos puntos, hallar los dos puntos en que ella corta a los ejes, y para ello basta con hacer

$x = 0$ y se deduce el valor de y

e

$y = 0$ y se deduce el valor de x.

Así, en el ejemplo anterior,

para $x = 0$ $\quad y = -1$

e

$y = 0$ para $3x - 1 = 0$, de donde $x = \frac{1}{3}$,

lo que da la figura 23, tomando escalas diferentes para las abscisas y ordenadas.

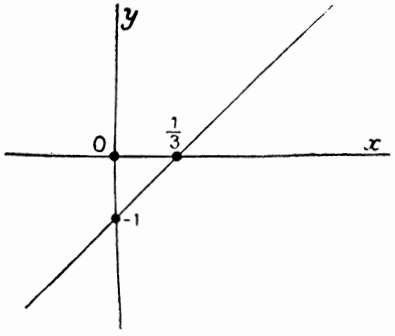

FIG. 23

Segunda forma. — La ecuación de una recta puede expresarse también en la forma

$$\boxed{Ax + By = C}$$

en donde A, B y C son coeficientes numéricos cualesquiera, positivos o negativos.

De esta expresión se pasa fácilmente a la forma anterior: se tiene

$$By = C - Ax$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} = mx + p.$$

Por ejemplo, la ecuación

$$3x + 4y = -12$$

nos da

$$y = \frac{-12 - 3x}{4} = -\frac{3}{4}x - 3.$$

Tercera forma. — Por último, suele ser cómodo el escribir la ecuación de una recta en función de la abscisa a del punto en que corta al eje de las x y de la ordenada b del punto en que corta al eje de las y (fig. 24).

— Partiendo de

$$y = mx + p. \qquad (1)$$

En el punto A se tiene

$$0 = ma + p$$

y en el punto B, se tiene

$$b = 0 + p.$$

Y de las dos ecuaciones, se deduce

$$m = -\frac{p}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1) el valor de m se tiene

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

o bien

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Por tanto, conociendo a y b, se puede trazar la recta fácilmente.

Por ejemplo, la recta

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

se puede escribir en la forma

$$2x + 4y = 8,$$

o bien

$$y = \frac{-2x + 8}{4} = -\frac{x}{2} + 2.$$

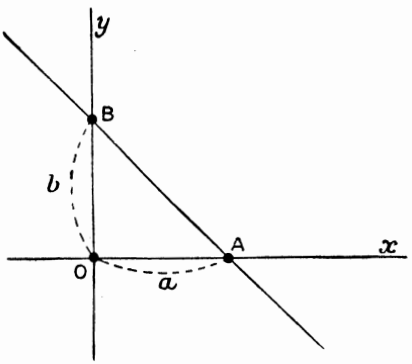

FIG. 24

De lo anterior, se deduce cuán fácil es pasar de una a otra forma en los tres tipos de ecuaciones de la recta.

25. Angulo de dos rectas (fig. 25). — Sean las dos rectas

$$y = m_1x + p_1 \qquad (m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1)$$

e

$$y = m_2x + p_2 \qquad (m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Llamemos θ al ángulo que forma ambas rectas entre sí, y sea P su punto de intersección. Se tiene

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2$$

y

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

o bien

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}}$$

Ejemplo: Sean las rectas

$$y = 5x + 1 \qquad \text{e} \qquad y = 3x - 2.$$

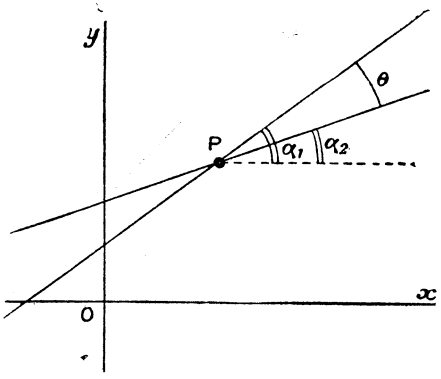

FIG. 25

Se tendrá

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{5-3}{1+5\cdot 3} = \frac{2}{16} = 0{,}125$$

de donde

$$\theta \neq 7°.$$

Consecuencias.

1.° *Rectas paralelas*: $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\theta = 0$, de donde

$$m_1 - m_2 = 0$$

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

lo que es evidente.

Por tanto, las dos rectas

$$y = 3x - 49 \qquad \text{e} \qquad y = 3x + 4$$

que tienen la misma pendiente son paralelas.

2.° *Rectas perpendiculares:* $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} \theta = \infty$$

de donde $$1 + m_1 \cdot m_2 = 0$$

y $$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

las pendientes son inversas y de signos contrarios.

Así, las rectas

$$y = 4x - 1 \quad \text{e} \quad y = -\frac{x}{4} + 10$$

son perpendiculares.

Intersección de dos rectas. — Sean las rectas

$$y = m_1 x + p_1$$

e $$y = m_2 x + p_2,$$

si no tienen la misma pendiente, se cortan en un punto P, y para hallar sus coordenadas, basta resolver ambas ecuaciones con dos incógnitas x e y, lo que es elemental.

26. Ecuación de una recta que pasa por un punto conocido. — Problema importante en geometría analítica, ya que se presenta en cada momento.

— Llamemos x_0 e y_0 a las coordenadas del punto conocido, y sigamos designando con x e y a las coordenadas variables, corrientes, a lo largo de la recta.

Consideremos la ecuación de la recta en la forma

$$y = mx + p. \tag{1}$$

Si pasa por el punto considerado, se debe verificar

$$y_0 = mx_0 + p$$

de donde

$$p = y_0 - mx_0.$$

y sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$y = mx + (y_0 - mx_0)$$

o bien

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

en donde no hay más que un parámetro, m.

Existen, evidentemente, infinitas rectas que pasan por un punto, mientras no se defina la pendiente. Si ésta es dada, no existirá más que una sola.

Ejemplo. — Sea el punto P, de coordenadas

$$x_0 = +2 \qquad y_0 = -4,$$

y la pendiente de la recta $m = 3$.

La ecuación de la recta es

$$y + 4 = 3(x - 2)$$

o bien

$$y = 3x - 10.$$

Conviene expresar la ecuación de la recta en esta forma, por claridad: en efecto, de esta manera se «ve» la recta.

27. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos (fig. 26). — Sean los puntos $P_1(x_1y_1)$ y $P_2(x_2y_2)$, y busquemos la ecuación de la recta que pasa por ellos.

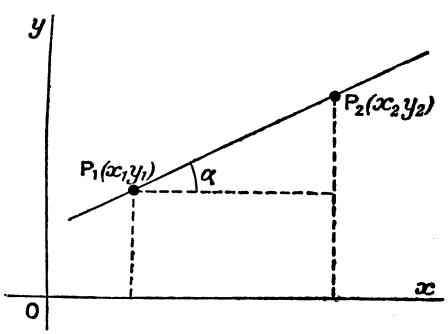

FIG. 26

— Basta escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto P_1 y cuya pendiente m es conocida. En efecto, esta pendiente es

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

siendo entonces la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

o bien, en la forma siguiente fácil de recordar:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Una vez sustituidos $x_1\, x_2\, y_1$ e y_2 por sus valores, se expresará la ecuación en la forma simple

$$y = mx + p.$$

Ejemplo. — Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 *y* P_2, *tales que*

$$x_1 = 2 \qquad y_1 = 4$$
$$x_2 = -1 \qquad y_2 = 3.$$

— Sustituyendo se tiene

$$\frac{y - 4}{3 - 4} = \frac{x - 2}{-1 - 2}$$

o bien $$3(y - 4) = -(x - 2)$$

$$y = \frac{x - 2 + 12}{3} = \frac{x}{3} + \frac{10}{3}.$$

Aplicación. — Sea la recta $y = mx + p$. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a ella que pase por el punto $P(x_0 y_0)$.

La ecuación general de *todas* las perpendiculares a la recta $y = mx + p$ es

$$y = -\frac{1}{m}x + r,$$

pero la que pasa por el punto $x_0\, y_0$ es

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0),$$

se desarrolla y se simplifica.

Ejemplo. — Sea la recta $y = 2x - 5$. *Hallar la ecuación de la perpendicular a ésta pasando por el punto* P(4,3).

— Se tiene

$$x_0 = 4 \qquad y_0 = 3,$$

la recta buscada es entonces

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

o

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

28. Condición para que tres puntos estén alineados. — Sean los puntos $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ y $P_3(x_3y_3)$.

Basta con escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_3

$$\frac{y - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1},$$

y obligar a que pase por el punto P_2; es decir, basta con sustituir x por x_2 e y por y_2, y ver si se verifica la igualdad siguiente:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Se podrían haber invertido los papeles y haber considerado como tercer punto otro cualquiera.

Esto es tan simple y evidente, que no es necesario hacer un ejemplo numérico.

29. Distancia de un punto a una recta.

Primer caso. — La recta está expresada en la forma

$$y = mx + p.$$

— Sean x_0 e y_0 las coordenadas del punto P (fig. 27). Tracemos la recta PB que corta a la $y = mx + p$ en un punto A de abscisa x_0 y de ordenada y_1.

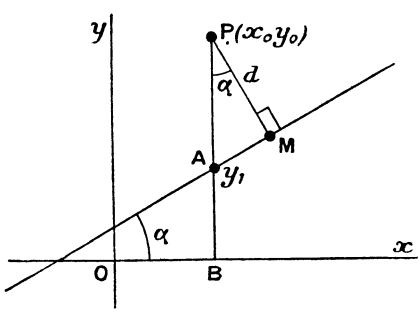

FIG. 27

Se tiene

$PM = d = AP \cos \alpha = (y_0 - y_1) \cos \alpha$; entonces, el punto A estando sobre la recta, verifica

$$y_1 = mx_0 + p.$$

Sustituyendo en d:

$$d = [y_0 - (mx_0 + p)] \cdot \cos \alpha,$$

o

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

de donde

$$\boxed{d = \frac{y_0 - mx_0 - p}{\sqrt{1 + m^2}}}$$

El numerador de esta fórmula es fácil de recordar: es, sencillamente, la ecuación $y = mx + p$, en donde se han pasado todos los términos a la izquierda del signo «igual», y sustituido x e y por las coordenadas del punto considerado.

Si d es positivo, $y_0 > y_1$ y el punto P se encuentra por encima de la recta, pero si d es negativo, $y_0 < y_1$ y el punto P está por debajo de la recta.

Ejemplo. — Sea la recta $y = 2x - 5$ y el punto P(2,3).

Sustituyendo, se tiene

$$d = \frac{3 - 2 \cdot 2 + 5}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

y siendo este valor positivo, el punto P se encuentra por encima de la recta.

$$Ax + By + C = 0.$$

Segundo caso. — La recta viene expresada en la forma

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} = mx + p,$$

y

$$d = \frac{y_0 - \left(-\frac{A}{B}x_0\right) + \frac{C}{B}}{\sqrt{1 + \left(\frac{A}{B}\right)^2}}$$

o bien

$$\boxed{d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

en donde el numerador es, sencillamente, la ecuación de la recta en la que se ha sustituido x e y por x_0 e y_0.

Ejemplo. — Sea la recta $3x + 4y - 6 = 0$ y el punto P(3,4).

— Inmediatamente se tiene

$$d = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{19}{5}.$$

30. Aplicación. — *Demostrar que la suma de los segmentos de las perpendiculares bajadas desde un punto cualquiera, tomado en el interior de un triángulo equilátero, sobre los tres lados es constante.*

— Sea a el lado del triángulo. Tomemos en la figura 28 la base BC por eje de las x, y la altura AO por eje de las y.

Consideremos un punto M *cualquiera* en el interior del triángulo, cuyas coordenadas son x_0 e y_0. Se tiene:

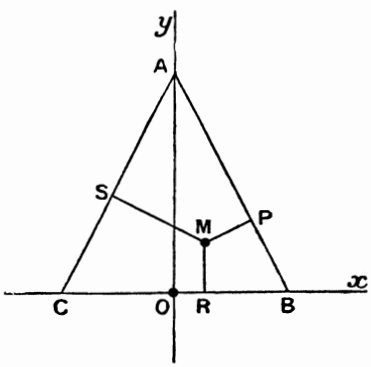

FIG. 28

$$OB = \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

La ecuación del lado AB es

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

o

$$2x\sqrt{3} + 2y - a\sqrt{3} = 0. \qquad (1)$$

La distancia MP es igual a

$$MP = \frac{2x_0\sqrt{3} + 2y_0 - a\sqrt{3}}{\sqrt{12+4}} = \frac{2x_0\sqrt{3} + 2y_0 - a\sqrt{3}}{4}.$$

La ecuación del lado AC es

$$-2x\sqrt{3} + 2y - a\sqrt{3} = 0$$

y la distancia MS es igual a

$$MS = \frac{-2x_0\sqrt{3} + 2y_0 - a\sqrt{3}}{\sqrt{12+4}} = \frac{-2x_0\sqrt{3} + 2y_0 - a\sqrt{3}}{4}.$$

Por otra parte

$$MR = y_0. \qquad \left(d = \frac{y_0 - mx_0 - p}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

Pero MP y MS son negativos, ya que M está por debajo de las rectas AB y AC, y, por tanto:

$$MP+MS+MR = -\left(\frac{2x_0\sqrt{3} + 2y_0 - a\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{-2x_0\sqrt{3} + 2y_0 - a\sqrt{3}}{4}\right) + y_0$$

$$= -\frac{4y_0 - 2a\sqrt{3}}{4} + y_0$$

$$= +\frac{a\sqrt{3}}{2} = \text{constante},$$

y esta suma es igual a la altura OA del triángulo. En consecuencia, es constante cualquiera que sea el punto M.

31. Ecuación general de las rectas que pasan por el punto de intersección de otras dos dadas. — El primer método que se presenta consiste en buscar las coordenadas del punto de intersección de las rectas D y D′:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

y a continuación, escribir la ecuación general de las rectas que pasan por un punto conocido. Este método es laborioso y es conveniente operar como sigue.

— En primer lugar, enunciemos el resultado diciendo que la ecuación general de las rectas que pasan por el punto de intersección de las D y D′ es

$$\lambda \cdot D + \lambda' \cdot D' = 0$$

o bien

$$D + KD' = 0$$

en donde λ y λ' son constantes, así como K.

En efecto, una ecuación tal, lineal en x e y, representa una recta; por otra parte, cualesquiera que sean los valores de λ y de λ', ella pasa por el punto de intersección de D y D′, ya que se verifica siempre que se cumplan simultáneamente las condiciones

$$D = 0 \quad \text{y} \quad D' = 0,$$

es decir cuando se sustituyan en las ecuaciones D y D′ las variables x e y por las coordenadas x_0 e y_0 del punto de intersección.

Los parámetros λ y λ' se determinarán al imponer a la recta buscada otra condición, por ejemplo su pendiente, o bien el hecho de pasar por un segundo punto conocido.

Ejemplo. — Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de dos rectas

$$D = 3x - 5y + 7 = 0$$
$$D' = 5x + 4y - 1 = 0$$

y por el punto P(2, — 3).

— La ecuación buscada es de la forma

$$\lambda(3x - 5y + 7) + \lambda'(5x + 4y - 1) = 0, \qquad (1)$$

y debiendo pasar esta recta por el punto P, se debe verificar

$$\lambda(3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7) + \lambda'(5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 1) = 0$$

o

$$28\lambda - 3\lambda' = 0,$$

basta entonces con tomar

$$\lambda = 3 \quad \text{y} \quad \lambda' = 28.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1), se tiene

$$3(3x - 5y + 7) + 28(5x + 4y - 1) = 0$$

o

$$149x + 97y - 7 = 0.$$

Aplicación. — *Hallar la condición para que tres rectas se corten en un mismo punto.*

— Sean las rectas

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, en el punto de encuentro de las tres rectas, la abscisa x y la ordenada y deben satisfacer a las tres ecuaciones a la vez; por tanto, las tres ecuaciones con dos incógnitas x e y deben ser compatibles.

32. Bisectrices del ángulo de dos rectas. — Se sabe que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los dos lados del ángulo. Por otra parte, dos rectas que se cortan tienen dos bisectrices, una en el ángulo agudo y la otra en el obtuso.

— Consideremos las rectas

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0. \end{aligned}$$

Sea un punto $M(x_0y_0)$ situado en una de las bisectrices, y expresemos qué equidista de las dos rectas, lo que nos da

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x_0 + B'y_0 + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

El lugar geométrico del punto M forma dos bisectrices, cuyas ecuaciones son

la primera:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{a'^2 + B'^2}}$$

la segunda:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

que siguen siendo ecuaciones lineales en x y en y.

Quitando denominadores y simplificando, se pueden expresar las ecuaciones de esas rectas en la forma

$$y = mx + p$$

33. Ejercicio. — *Demostrar que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.*

— Consideremos en la figura 29, el triángulo ABC y tomemos el lado AB como eje de las x y como eje de las y la perpendicular que pasa por C. Llamemos:

a a la abscisa del punto A

b a la abscisa del punto B

c a la ordenada del punto C.

La altura trazada desde C tiene por ecuación $x = 0$; hallemos la ecuación de la altura trazada desde A: la recta BC tiene como pendiente $-\frac{c}{b}$, y, por tanto, la pendiente de la altura AH es $\frac{b}{c}$.

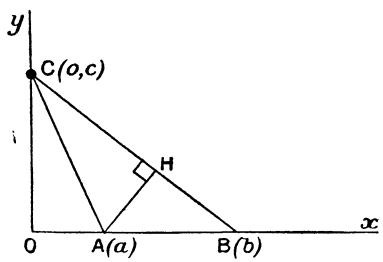

FIG. 29

La ecuación de la recta AH que pasa por el punto $A(a, 0)$ es

$$y = \frac{b}{c}(x - a).$$

Análogamente, la recta AC tiene como pendiente $-\frac{c}{b}$, y la altura trazada desde B sobre AC tendrá como pendiente $\frac{a}{c}$. La ecuación de la altura trazada desde $B(b, 0)$ sobre AC es

$$y = \frac{a}{c}(x - b). \qquad (1)$$

El punto de intersección de las dos primeras alturas CO y AH se obtiene resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones correspondientes, lo que da

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = -\frac{ab}{c}.$$

Entonces, esos dos valores verifican la ecuación (1).

El punto de intersección de las dos primeras alturas se encuentra sobre la tercera, es decir que las tres se cortan en un mismo punto.

34. Desigualdades de primer grado. — Sea la desigualdad

$$Ax + By + C > 0, \qquad (1)$$

y hallemos los puntos del plano que satisfacen a ésta. Aplicaremos el teorema siguiente:

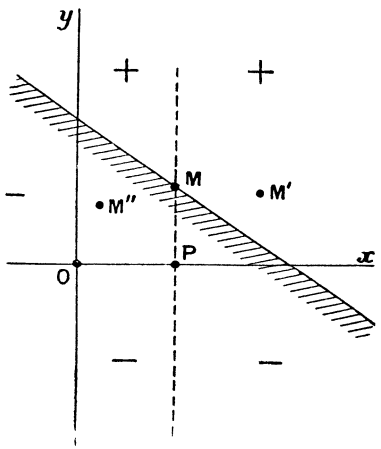

FIG. 30

Teorema. — *Los puntos del plano que satisfacen la condición*

$$Ax + By + C > 0$$

son aquellos que están situados de un mismo lado de la recta

$$Ax + By + C = 0,$$

que divide al plano en dos regiones, una positiva y otra negativa.

— En efecto, resolvamos con relación a y

$$By > -Ax - C,$$

1.° si B es > 0, se tiene

$$y > -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Consideremos una abscisa cualquiera $x = OP$ (fig. 30) y un punto que se desplaza sobre la recta punteada, paralela al eje Oy, siendo la recta $Ax + By + C = 0$. En el punto M se tiene

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

verificándose esta igualdad a todo lo largo de la recta.

Para un punto M′ cualquiera, su ordenada es mayor que la de la recta (con abscisa igual), y la desigualdad (1) se satisface. Para un punto M″ ocurre a la inversa, de donde se deduce: *para toda la región del plano situada por encima de la recta, se verifica la desigualdad* (1).

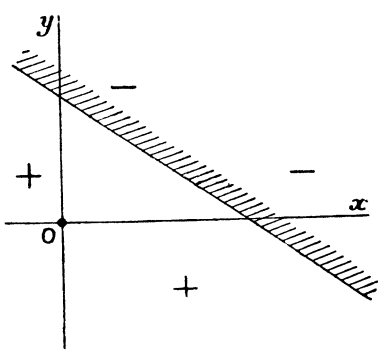

FIG. 31

2.° si B < 0, se tendrá

$$y < -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Razonando de forma análoga, se tendrán los signos indicados en la figura 31.

Para saber de qué lado se verifica la desigualdad, se toma el origen y se observa el signo.

Ejemplo. — Sea la ecuación $2x - 3y + 12 > 0$ (1)

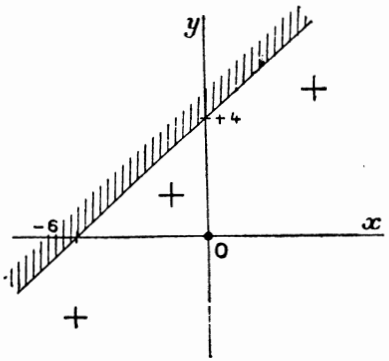

FIG. 32

Tracemos la recta $2x - 3y + 12 = 0$ (fig. 32). Encontrándose el origen en la región positiva, la desigualdad (1) se satisface para todos los puntos situados por debajo de la línea recta.

35. Area de un triángulo. —Consideremos el triángulo ABC (figura 33), cuyos vértices tienen como coordenadas $A(x_1\, y_1)$, $B(x_2\, y_2)$, $C(x_3\, y_3)$.

— El área de este triángulo es,por ejemplo

$$S = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot h, \qquad (1)$$

la distancia entre los puntos B y C es

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \quad (2)$$

y la ecuación de la recta BC, que pasa por los dos puntos conocidos B y C es

$$\frac{y - y_2}{y_2 - y_3} = \frac{x - x_2}{x_2 - x_3}$$

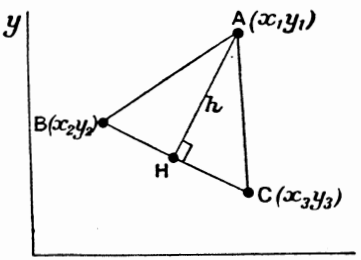

FIG. 33

o bien

$$(y_2 - y_3)(x - x_2) - (x_2 - x_3)(y - y_2) = 0,$$

que es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0.$$

La distancia h del punto A a la recta BC es

$$h = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{(y_2 - y_3)(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}.$$

Al sustituir los valores de h y de BC en la ecuación (1), se ve que la distancia BC de la fórmula (2) es exactamente igual al denominador de h; haciendo el producto, se obtiene:

$$S = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot h = \frac{1}{2}[(y_2 - y_3)(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)]$$

o

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)],$$

fórmula fácil de recordar observando los subíndices de las letras: basta con permutar circularmente las letras.

— Puede observarse, que si se llama Δ al determinante siguiente, se tiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

se tiene

$$S = \frac{1}{2}\Delta.$$

En Δ el orden de las columnas es x, y, 1, y el de las filas corresponde al orden de los tres vértices ACB.

36. Ecuaciones homogéneas de segundo grado en x e y. — Recordemos que se llama ecuación homogénea a aquella en que los términos son del mismo grado con relación a las incógnitas. Consideremos entonces la ecuación de segundo grado homogénea en x y en y.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

Vamos a ver que una ecuación tal representa un haz de dos rectas que pasan por el origen (y recíprocamente).

— En efecto, dividiendo por x^2

$$A\left(\frac{y}{x}\right)^2 + B\frac{y}{x} + C = 0$$

y haciendo

$$\frac{y}{x} = m,$$

se tiene

$$Am^2 + Bm + C = 0$$

cuyas raíces son

$$m_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad m_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

Se tiene así

$$y = m_1 x \qquad \text{e} \qquad y = m_2 x$$

que representan dos rectas que pasan por el origen, y cuyas pendientes son m_1 y m_2 (salvo si $B^2 - 4AC = 0$, en que se verifica que $m_1 = m_2$, y, por tanto, ambas rectas se confunden).

Por último, si $B^2 - 4AC < 0$, las rectas son imaginarias.

37. Generalización. — El estudio anterior realizado sobre una ecuación homogénea de segundo grado, puede generalizarse a una ecuación homogénea de grado n.

— Vamos a demostrar el teorema siguiente.

Teorema. — *Una ecuación homogénea de grado n, con dos variables x e y, representa n rectas que pasan por el origen.*

Esas rectas pueden ser reales o imaginarias, distintas o coincidentes.

— Consideremos la ecuación homogénea de grado n

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + A_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + A_n y^n = 0.$$

Sacando x^n como factor común

$$x^n \left(A_0 + A_1 \frac{y}{x} + A_2 \frac{y^2}{x^2} + \ldots + A_n \frac{y^n}{x^n} \right) = 0,$$

y haciendo $\frac{y}{x} = m$,

$$x^n (A_0 + A_1 m + A_2 m^2 + \ldots + A_n m^n) = 0,$$

(que debe verificarse para todo valor de x), y, por tanto, debe ser

$$A_0 + A_1 m + A_2 m^2 + \ldots + A_n m^n = 0.$$

Así se obtiene una ecuación de grado n, que según el teorema célebre de DESCARTES (que no demostraremos aquí), tiene n raíces: $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$, *reales o imaginarias, distintas o coincidentes,* pudiéndose escribir

$$A_n (m - m_1)(m - m_2)(m - m_3) \ldots (m - m_n) = 0.$$

Ecuación que se verificará para

$$m - m_1 = 0, \qquad m - m_2 = 0$$
$$m - m_3 = 0, \qquad m - m_n = 0,$$

o

$$\frac{y}{x} - m_1 = 0, \qquad \frac{y}{x} - m_2 = 0$$
$$\frac{y}{x} - m_3 = 0, \qquad \frac{y}{x} - m_n = 0,$$

es decir

$$y = m_1x, \qquad y = m_2x, \qquad y = m_3x, \qquad y = m_nx,$$

ecuaciones que representan rectas que pasan por el origen, y de pendientes m_1, m_2 ... m_n.

— Por tanto, la ecuación primitiva representa n rectas que pasan por el origen, siendo éstas reales o imaginarias, distintas o coincidentes, al mismo tiempo que las raíces de la ecuación.

Entonces, la dificultad consiste en calcular las raíces de una ecuación de grado n, estudio muy complicado que se hace en Algebra superior, que no consideraremos aquí, ya que únicamente nos referiremos a las ecuaciones de segundo grado, caso corriente que se presenta en la práctica.

Aplicación. — Hallar el ángulo que forman las rectas

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

— La ecuación correspondiente en m, después de haber dividido por x^2, es

$$Am^2 + Bm + C = 0.$$

Para que esta ecuación represente dos rectas, es preciso que

$$B^2 - 4AC > 0,$$

y entonces existen dos raíces m_1 y m_2, siendo las rectas

$$y = m_1x \quad \text{e} \quad y = m_2x. \qquad \left(m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)$$

El ángulo de las rectas vendrá dado entonces por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\dfrac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A}}{1 + \dfrac{C}{A}} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A + C}.$$

Así, la condición de paralelismo de las dos rectas será

$$B^2 - 4AC = 0$$

y ambas rectas son coincidentes.

Las rectas serán perpendiculares, si se verifica que $\operatorname{tg} \theta = \infty$, o sea

$$A + C = 0 \quad \text{y} \quad A = -C.$$

Este problema nos servirá más adelante para hallar las asíntotas de las hipérbolas.

Nota I. — Una ecuación de segundo grado, homogénea en x e y, como se acaba de ver, se puede representar por dos rectas. Estas, pueden considerarse como forma degenerada de las cónicas (ver capítulos VII y VIII).

a) si las dos rectas son *reales* y *distintas*, se trata de una hipérbola reducida a sus asíntotas;

b) si las dos rectas *son reales, pero coincidentes*, se trata de una parábola reducida a su eje;

c) si las dos rectas son *imaginarias*, es una forma degenerada de la elipse.

Nota II. — Al final de este tomo, en los capítulos dedicados a ecuaciones, daremos la ecuación de la recta en coordenadas polares y en coordenadas paramétricas.

Creemos es preferible no mezclarlas, por simplicidad de exposición.

CAPITULO IV

ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA

38. Ecuación de la circunferencia.

Primer caso. — *El centro se encuentra en el origen de coordenadas* (fig. 34).

— Para un punto P cualquiera sobre la circunferencia, de abscisa x y de ordenada y, se verifica siempre

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

cualesquiera sean los signos de x e y.

Así, la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ representa una circunferencia de radio 3.

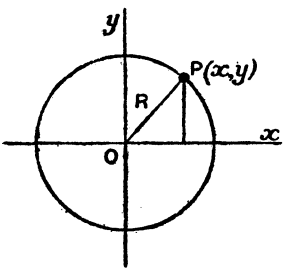

FIG. 34

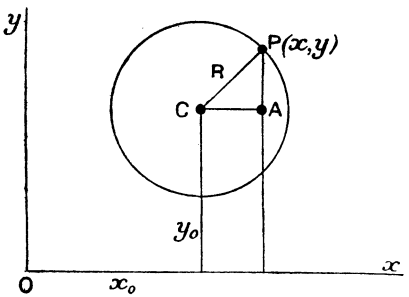

FIG. 35

Segundo caso. — *El centro* C *es un punto cualquiera del plano.*

— Sean x_0 e y_0 las coordenadas del centro (fig. 35), y x e y las coordenadas de un punto P cualquiera de la circunferencia.

Tracemos el triángulo rectángulo CAP, en el que se verifica

$$\overline{CA}^2 + \overline{AP}^2 = R^2$$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2} \qquad (1)$$

que es la ecuación de la circunferencia. Ordenándola, puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0, \qquad (2)$$

en la que se observa un término en x^2, en y^2, en x, en y, y uno constante.

De lo anterior pueden deducirse las conclusiones siguientes: para que una ecuación de segundo grado en x y en y represente una circunferencia, es preciso

1.° *que no existan términos en xy,*

2.° *que los coeficientes de x^2 y de y^2 sean iguales* (no teniendo que ser forzosamente la unidad).

Si $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$, no existen términos en x o en y, y el centro del círculo se encuentra sobre el eje de las x o de las y.

Por último, si una circunferencia pasa por el origen O, la ecuación debe de carecer de término constante, ya que para $x = 0$ debe verificarse $y = 0$.

Ejemplos. — 1.° *Hallar la ecuación de la circunferencia de radio* $R = 3$ *que pasa por el punto* $x_0 = 2$, $y_0 = 4$.

— Se tiene

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + (4 + 16 - 9) = 0$$

o

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0.$$

2.° *Hallar la ecuación y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos* A(0,3) B(2,1) C(3,2)

— Expresemos la ecuación de la circunferencia en cada uno de los puntos:

en A $\quad 0 + 3^2 - 0 - 2 \cdot 3y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$

en B $\quad 2^2 + 1 - 2 \cdot 2x_0 - 2 \cdot y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$

en C $\quad 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3x_0 - 2 \cdot 2y_0 + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0,$

lo que da tres ecuaciones con tres incógnitas x_0, y_0 y R:

$$\left|\begin{array}{r} 9 - 6y_0 + K = 0 \\ 5 - 4x_0 - 2y_0 + K = 0 \\ 13 - 6x_0 - 4y_0 + K = 0. \end{array}\right.$$

Eliminando K, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} -x_0 + y_0 = 1 \\ -3x_0 + y_0 = -2 \end{array}\right| \quad \text{de donde} \quad \begin{array}{l} y_0 = \dfrac{3}{2} \\ x_0 = \dfrac{5}{2} \end{array}$$

y

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 9 - 6y_0} = \sqrt{\frac{10}{4}} \approx 1{,}58.$$

Entonces, la ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

o

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + 6 = 0.$$

3.° *Sea la circunferencia*

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

Determinar su radio y las coordenadas del centro.

Identificando los términos con los de la ecuación (2), se obtiene

término en x: $-2x_0 = -2$, de donde $x_0 = 1$,
término en y: $-2y_0 = 4$, de donde $y_0 = -2$,
términos constantes: $x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 1$,

de donde

$$1 + 4 - R^2 = 1 \quad \text{y} \quad R = 2.$$

Resumen. — Una ecuación completa de segundo grado

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

representa una circunferencia, si se verifica simultáneamente

$$\boxed{A = C \quad \text{y} \quad B = 0}$$

A veces, el círculo se puede reducir a un punto e incluso ser imaginario, dependiendo todo de los coeficientes.

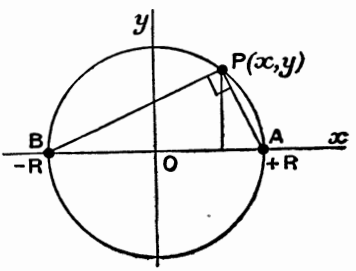

FIG. 36

Aplicación. — *Demostrar que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto* (fig. 36).

—La pendiente de la recta PA es

$$m = -\frac{y}{R - x},$$

la de la PB es

$$m' = \frac{y}{x + R}.$$

Por otra parte, se tiene $x^2 + y^2 = A^2$, lo que da

$$m \cdot m' = \frac{y}{x - R} \cdot \frac{y}{x + R} = \frac{y^2}{x^2 - R^2}$$
$$= \frac{y^2}{-y^2} = -1$$

de donde

$$m = -\frac{1}{m'},$$

siendo entonces las dos rectas perpendiculares.

39. Intersección de una circunferencia y una recta. —Sea la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y la recta

$$y = mx + p.$$

Se trata de saber si la recta corta a la circunferencia, y en ese caso encontrar los puntos de intersección A y B (fig. 37).

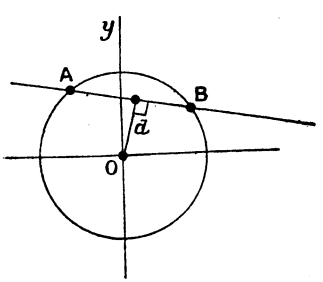

FIG. 37

—En los puntos de intersección, las abscisas x de la recta y de la circunferencia son las mismas, ocurriendo lo mismo con las ordenadas y: basta, entonces, resolver el sistema de estas dos ecuaciones con dos incógnitas x e y. Se tiene

$$x^2 + (mx + p)^2 = R^2$$

o bien

$$x^2(1 + m^2) + 2pmx + (p^2 - R^2) = 0$$

y

$$x = \frac{-2pm \pm \sqrt{4p^2m^2 - 4(1 + m^2)(p^2 - R^2)}}{2(1 + m^2)}$$

$$= \frac{-pm \pm \sqrt{R^2(1 + m^2) - p^2}}{1 + m^2} = \frac{-pm \pm \sqrt{\Delta}}{1 + m^2}$$

Tres casos pueden presentarse:
si $\Delta > 0$, existen dos valores de x e y, y la recta corta al círculo en dos puntos A y B,
si $\Delta = 0$, hay un valor único para x e y, y la recta es tangente al círculo,
si $\Delta < 0$, no existe valor para x, y la recta no corta al círculo.

El valor crítico de Δ es

$$R^2(1 + m^2) - p^2 = 0$$

o

$$R = \frac{\pm p}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{de donde} \quad p = \pm R\sqrt{1 + m^2} \tag{1}$$

siendo la ecuación de la tangente al círculo $y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}$.

Conviene observar que la distancia d del centro O a la recta $y = mx + p$ es

$$d = \frac{y_0 - mx_0 - p}{\sqrt{1 + m^2}} = \pm \frac{p}{\sqrt{1 + m^2}}$$

la ecuación expresa así que el valor crítico de Δ da

$$R = d$$

lo que era evidente.

— Desde el principio se podía haber calculado esta distancia d y ver si

$$d \gtrless R,$$

pero esto no habría evitado el resolver las dos ecuaciones primitivas para encontrar las coordenadas de los puntos de intersección.

40. Intersección de dos circunferencias (fig. 38). — Tomemos la línea que une los centros OO′ como eje de las x, y la perpendicular OY como eje de las y.

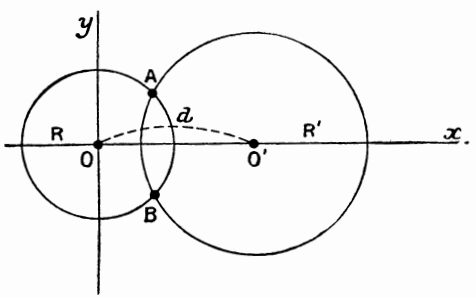

FIG. 38

La circunferencia de centro O tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

y la de centro O'

$$(x - d)^2 + y^2 = R'^2$$

Para hallar las coordenadas de los puntos de intersección A y B, es necesario resolver el sistema de las dos ecuaciones con dos incógnitas. La segunda ecuación se transforma en

$$(x - d)^2 + (R^2 - x^2) = R'^2$$

de donde

$$x = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d}$$

lo que da un solo valor. Para y se tienen dos valores

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Así se obtienen los puntos A y B, con la condición de que

$$R^2 > x^2$$

o bien

$$R^2 > \frac{(R^2 + d^2 - R'^2)^2}{4d^2}$$

de donde

$$-R \leqslant \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d} \leqslant +R$$

o sea

$$-2dR \leqslant d^2 + R^2 - R'^2 \leqslant 2dR,$$

lo que origina los dos casos siguientes:

1.° $$R'^2 \leqslant d^2 + R^2 + 2dR$$
$$\leqslant (d + R)^2$$

y $$R' \leqslant d + R$$

2.° $$d^2 + R^2 - 2dR \leqslant R'^2$$
$$(d - R)^2 \leqslant R'^2$$

o bien $$(d - R) \leqslant + R'^2.$$

En resumen, se obtienen dos condiciones

$$d \geqslant R' - R$$
$$d \leqslant R + R'$$

lo que era evidente «a priori».

41. Potencia de un punto con relación a una circunferencia. — Sea el círculo de centro C (fig. 39) y la secante PMM′. La geometría ordinaria enseña que la potencia de un punto P es PM · PM′, y que este producto es constante cualquiera que sea la secante.

Este resultado es fácil de expresar analíticamente.

— Llamemos

$x_0\, y_0$ a las coordenadas del centro C,

$x_1\, y_1$ a las coordenadas de un punto P cualquiera,

$x\, y$ a las coordenadas de un punto M cualquiera del círculo,

ρ a la distancia PM (o PM′)

y α al ángulo que forma PM con el eje de las x.

Se verificará

$$x = x_1 + \rho \cos \alpha \qquad y = y_1 + \rho \operatorname{sen} \alpha.$$

Expresemos que x e y satisfacen a la ecuación de la circunferencia, es decir que el punto M está sobre la circunferencia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

lo que da

$$(x_1 + \rho \cos \alpha - x_0)^2 + (y_1 + \rho \operatorname{sen} \alpha - y_0)^2 = R^2,$$

y ordenando con relación a ρ

$$\rho^2 + 2\rho[\cos \alpha\,(x_1 - x_0) + \operatorname{sen} \alpha\,(y_1 - y_0)] + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - R^2 = 0,$$

ecuación de segundo grado en ρ, cuyas dos raíces son los segmentos PM y PM′. Su producto

$$\rho' \cdot \rho'' = \frac{c}{a} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - R^2$$

es independiente de α, y, por tanto, constante, no dependiente más que de R y de las posiciones del punto P y del centro C.

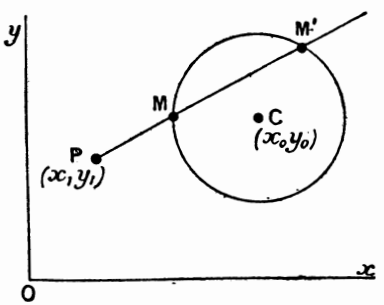

FIG. 39

Se observa que

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

es la distancia d del punto P al centro del círculo, siendo la potencia por consiguiente

$$d^2 - R^2 = \text{constante},$$

es positiva o negativa, y también igual al cuadrado del segmento de tangente trazado al círculo por el punto P (pues $\rho' = \rho''$).

Esta potencia se obtiene sustituyendo, en la ecuación de la circunferencia, x e y por las coordenadas del punto P. Fácilmente se ve también si el punto P es interior o exterior al círculo, según sea el signo de esta potencia.

42. Eje radical de dos circunferencias. — El lugar geométrico de los puntos de igual potencia con relación a dos circunferencias es una recta que se llama *eje radical.*

— Sean las circunstancias

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0.$$

Del párrafo anterior se deduce que, para que un punto P tenga la misma potencia con relación a las dos circunferencias, se debe tener

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c'$$

o bien

$$2x(a - a') + 2y(b - b') + c + c' = 0$$

ecuación que, siendo lineal, representa una recta. Calculando su pendiente se vería fácilmente que es *perpendicular* a la línea que une los centros.

CAPITULO V

ESTUDIO GENERAL DE TANGENTES Y NORMALES

PUNTOS SINGULARES

43. Ecuación de la tangente a una curva. — Sea una curva

$$y = f(x),$$

se trata de hallar la ecuación de la tangente a ella en el punto P de coordenadas x_0 e y_0.

— Basta escribir la ecuación de una recta que pase por el punto dado y cuya pendiente es conocida. En efecto, la pendiente es la derivada de la función, derivada en la que se sustituye x por x_0 e y por y_0. La tangente es entonces

$$\boxed{y - y_0 = f'_{x_0} \cdot (x - x_0)}$$

Ejemplos. — 1.° *Sea la curva* $y = 3x^2$, *y el punto* P *de abscisa* $x_0 = 4$.

— La ordenada de ese punto es $y_0 = 3 \cdot 4^2 = 48$, y como

$$y' = 6x \qquad \text{e} \qquad y'_0 = 6 \cdot 4 = 24,$$

la ecuación de la tangente en P es

$$(y - 48) = 24(x - 4)$$
$$y = 24x - 48.$$

2.° *Tangente a la parábola en el punto* $x_0 y_0$.

— Sea la parábola $y^2 = 2px$. Se tiene

$$y = \sqrt{2px} \qquad \text{e} \qquad y_0' = \frac{1}{2\sqrt{2px_0}} \cdot 2p,$$

la tangente es pues

$$y - y_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

de donde

$$yy_0 - y_0^2 - px + px_0 = 0,$$

y como

$$y_0^2 = 2px_0,$$

resulta

$$yy_0 = px + px_0 = p(x + x_0).$$

Caso en que la curva viene expresada en la forma $f(x, y) = 0$.

En este caso se sabe que la derivada es

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

sustituyendo en esta expresión x por x_0 e y por y_0. La ecuación de la tangente es entonces

$$y - y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}} \cdot (x - x_0)$$

o bien

$$\boxed{f'_{y_0}(y - y_0) + f'_{x_0}(x - x_0 = 0}$$

Ejemplos.

1.° *Tangente al círculo.* Sea el círculo

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 = f(x, y).$$

— La ecuación de la tangente en el punto (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0) = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

o bien

$$yy_0 - y_0^2 = -xx_0 + x_0^2$$
$$yy_0 + xx_0 = x_0^2 + y_0^2,$$

o sea

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2,$$

y por tanto la ecuación de la tangente al círculo

$$yy_0 + xx_0 = R^2.$$

— Si no se conocen x_0 e y_0, la ecuación de las dos tangentes cuya pendiente m viene dada es, según lo anteriormente visto (intersección de una recta y de un círculo):

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

2.° *Tangente a la elipse.* Consideremos la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

— La ecuación de la tangente en el punto $(x_0\, y_0)$, es

$$y - y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0) = -\frac{b^2x_0}{a_0y_0}(x - x_0)$$

o bien

$$a^2yy_0 - a^2y_0^2 = -b^2xx_0 + b^2x_0^2,$$

entonces, se tiene

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

de donde

$$a^2yy_0 + b^2xx_0 = a^2b^2$$

y al dividir los dos miembros por a^2b^2, se tiene como ecuación de la tangente

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

— *Otro método.* — Se podría hallar la intersección de la recta $y = mx + p$ con la elipse. Para hallar las coordenadas de los puntos de encuentro, basta con resolver el sistema

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$
$$y = mx + p.$$

que da

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mpx + (a^2p^2 - a^2b^2) = 0,$$

ecuación que deberá tener solamente una raíz, es decir

$$\Delta = 0 = 4a^4m^2p^2 - 4(a^2m^2 + b^2)(a^2p^2 - a^2b^2),$$

y al desarrollar y simplificar, se obtiene

$$a^2b^2 \cdot a^2m^2 - b^2a^2p^2 + a^2b^4 = 0$$
$$a^2m^2 - p^2 + b^2 = 0$$

y

$$p = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

La ecuación de las tangentes a la elipse de pendiente m es, por consiguiente

$$y = mx + p = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

— Así hemos calculado las ecuaciones de las tangentes al círculo y a la elipse de dos maneras diferentes. Para hallar las tangentes a la hipérbola y a la parábola basta con operar de forma análoga.

Las ecuaciones de las normales, las longitudes de las subtangentes y de las subnormales se deducen fácilmente, como veremos más adelante.

44. Determinación de las tangentes paralelas a una dirección dada. — Los problemas anteriores de hallar las tangentes paralelas a una dirección m dada, se pueden generalizar al caso de una curva cualquiera.

— Las coordenadas x_0y_0 del punto de contacto de la tangente con la curva $f(x, y) = 0$, se obtendrán resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left| \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ m = -\dfrac{f'_x}{f'_y}. \end{array} \right.$$

Si la primera ecuación es de grado α, la segunda será de $\alpha - 1$, pues el número de tangentes paralelas a una dirección dada es, a lo más, igual a $\alpha(\alpha - 1)$.

— Si la tangente buscada debe ser paralela al eje de las abscisas, $m = 0$, las coordenadas de los puntos de contacto vendrán dadas por las ecuaciones

$$f(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f'_x = 0.$$

Análogamente, los puntos de contacto de las tangentes paralelas al eje de ordenadas, vendrán dados por las ecuaciones

$$f(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f'_y = 0.$$

Ejemplos.

1.° Comencemos por un ejemplo sencillo: *Hallar la tangente al círculo*

$$x^2 + y^2 = 25$$

en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

—De la ecuación se deduce

$$y_0 = \sqrt{25 - 3^2} = 4.$$

Por otra parte

$$f'_x = 2x \quad \text{y} \quad f'_{x_0} = 2 \cdot 3 = 6$$
$$f'_y = 2y \quad \text{y} \quad f'_{y_0} = 2 \cdot 4 = 8,$$

y la tangente es

$$8(y - 4) + 6(x - 3) = 0$$

o bien

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

2.° *Sea la lemniscata* (en donde $a = 1$)

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Hallar la ecuación de las tangentes horizontales a la curva, así como las coordenadas del punto de contacto.

—Desarrollando

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0 = f(x, y) \qquad (1)$$

de donde

$$f'_x = 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 0 \qquad (\text{con } f'_y \neq 0)$$

o bien

$$x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \begin{cases} \nearrow x_0 = 0 \\ \searrow x_0^2 = 1 - y^2 \end{cases}$$

Sustituyendo esos valores en la ecuación (1):
para $x_0 = 0$, se tiene

$$y^4 + 2y^2 = 0 \quad \text{o} \quad y^2(y^2 + 2) = 0$$

de donde $y = 0$, que corresponde al origen. Este caso se excluye, ya que se anula al mismo tiempo f'_y. Si se considera el otro valor de x_0

$$x_0^2 = 1 - y^2$$

que da

$$(1 - y^2)^2 + y^4 + 2(1 - y^2)y^2 - 2(1 - y^2) + 2y^2 = 0.$$

y simplificando

$$4y^2 - 1 = 0 \quad \text{de donde} \quad y_0 = \pm\frac{1}{2},$$

que es la ordenada de los puntos de contacto de la tangente con la curva.

— En resumen, la lemniscata tiene dos tangentes horizontales, siendo sus ecuaciones

$$y = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}$$

45. Tangente a una curva, y pasando por un punto exterior dado. Tomando un ejemplo simple, vamos a estudiar el problema importante de encontrar la ecuación de las tangentes a una curva que pasan por un punto exterior conocido $(x_0\, y_0)$.

— Estudiando el problema en el caso de la parábola, servirá de ejemplo tipo para las otras curvas.

Sea la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Para hallar la ecuación de las tangentes a ella, se puede buscar la intersección de la recta

$$y = mx + h$$

con la parábola, obteniendo los puntos de intersección: basta con resolver esas dos ecuaciones con dos incógnitas x e y.

Se tendrá

$$(mx + h)^2 = 2px$$

o bien

$$m^2x^2 + 2(mh - p)x + h^2 = 0,$$

ecuación que tendrá dos, una o ninguna raíces.

Para que la recta sea tangente es necesario que sólo exista un punto de contacto, es decir que tenga una solución única la ecuación anterior ($\Delta = 0$), o sea

$$(mh - p)^2 - m^2h^2 = 0$$

$$p^2 - 2pmh = 0 \qquad \text{y} \qquad h = \frac{p}{2m}$$

y la ecuación de la tangente es

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{1}$$

Si no se conociera m sino solamente las coordenadas x_0 e y_0 del punto exterior por donde se traza la tangente, su ecuación sería

$$y - y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0).$$

—Pero volviendo a la primera forma de la ecuación (1), y puesto que la tangente pasa por el punto $(x_0\, y_0)$, se tendrá

$$y_0 = mx_0 + \frac{p}{2m}$$

de donde

$$2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0$$

ecuación que proporcionará el valor de m, y que tendrá dos, una o ninguna raíces. Así existirán dos, una o ninguna tangente a la curva.

—La marcha seguida anteriormente se aplicará a todas las curvas.

46. Ejercicios sobre tangentes.

1.° *Determinar el lugar geométrico de los puntos desde donde pueden trazarse tangentes perpendiculares a una elipse.*

—En el parágrafo 43 hemos establecimo la ecuación de las tangentes a una elipse de pendiente m:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Consideremos una de ellas, por ejemplo la del signo +.

Sean x_0, y_0 las coordenadas de un punto del plano por donde pasa esta tangente; hallemos el lugar geométrico de esos puntos por donde se pueden trazar dos tangentes perpendiculares entre sí. Al pasar la tangente por ese punto, se verificará

$$y_0 = mx_0 + \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

o

$$(y_0 - mx_0)^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$(x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0m + (y_0^2 - b^2) = 0,$$

ecuación de segundo grado que da las pendientes m_1 y m_2 de las tangentes trazadas desde ese punto a la elipse. Para que sean perpendiculares, debe verificarse $m_1 \cdot m_2 = -1$, es decir

$$\frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1,$$

o suprimiendo los índices para tener la ecuación general del lugar:

$$y^2 + x^2 = a^2 + b^2 = R^2,$$

que representa un círculo circunscrito al triángulo rectángulo construido sobre los dos ejes $2a$ y $2b$ de la elipse. Se operará de forma análoga para la hipérbola.

2.° *Demostrar que una elipse y una hipérbola que tienen los mismos focos se cortan en ángulo recto* (fig. 40).

— Sean

$$AA' = 2a, \quad FF' = 2c, \quad DD' = 2d.$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \qquad (a^2 - c^2 = b^2);$$

la de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{c^2 - d^2} = 1, \qquad (\text{con } c^2 - d^2 = b^2).$$

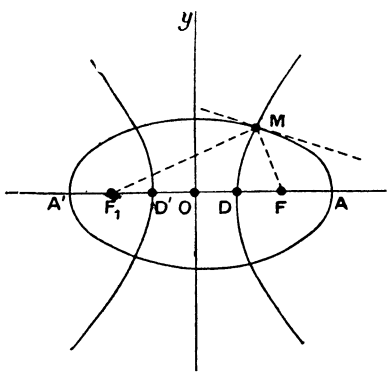

FIG. 40

Desarrollando las ecuaciones se tendrá:

para la elipse

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0$$

para la hipérbola

$$(c^2 - d^2)x^2 - d^2y^2 - d^2(c^2 - d^2) = 0$$

Las pendientes de las tangentes son

$$m = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

que da el punto de intersección M, de abscisa x y de ordenada y:

para la elipse

$$m_1 = -\frac{(a^2 - c^2)x}{a^2y}$$

para la hipérbola

$$m_2 = -\frac{(c^2 - d^2)x}{-d^2y}.$$

Haciendo el producto m_1m_2 (que debe ser igual a -1 si las dos tangentes son perpendiculares), se tiene:

$$m_1m_2 = -\frac{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)x^2}{a^2d^2y^2}. \qquad (1)$$

Restando la ecuación de la hipérbola de la elipse, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{c^2 - d^2} = 0$$

o

$$y^2\left[\frac{c^2 - d^2 + a^2 - c^2}{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)}\right] = x^2\left[\frac{a^2 - d^2}{a^2d^2}\right]$$

o bien

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(a^2 - d^2)a^2d^2}{(a^2 - d^2)(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)}$$

$$= \frac{a^2d^2}{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1):

$$m_1m_2 = -\frac{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)}{a^2d^2} \cdot \frac{a^2d^2}{(a^2 - c^2)(c^2 - d^2)} = -1.$$

Ambas tangentes son perpendiculares entre sí.

47. Subtangente (fig. 41). — Se llama *subtangente* a la longitud PT (proyección de la tangente MT sobre el eje de las x).

La ecuación de la tangente en $M(x_0, y_0)$ es

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

en T, $y = 0$, y entonces

$$-y_0 = y_0'(x - x_0).$$

De donde la abscisa x del punto T:

$$OT = x = x_0 - \frac{y_0}{y_0'},$$

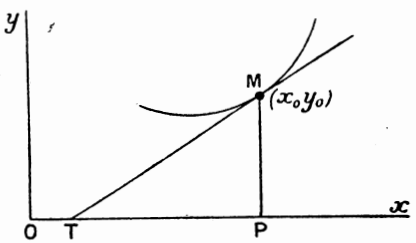

FIG. 41

Entonces, se tiene

$$\text{subtangente} = PT = -TP$$

$$= -(OP - OT)$$

$$= -\left[x_0 - \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}\right)\right]$$

$$PT = -\frac{y_0}{y'_0}$$

Generalizando, para un punto cualquiera (x, y) de la curva $y = f(x)$, la subtangente tendrá por longitud

$$\boxed{\text{subtangente} = -\frac{y}{y'}}$$

1er *Ejemplo.* — *Hallar la curva cuya subtangente es, en cada punto igual a* $-2x$.

— Se tiene

$$-\frac{y}{y'} = -2x$$

o bien

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x}.$$

Integrando

$$\log y = \frac{1}{2}\log x + \log K = \log K\sqrt{x}$$

$$y = K\sqrt{x} \quad \text{o} \quad y^2 = K^2 x,$$

que es una parábola.

2.° *Ejemplo.* — *Hallar la curva cuya subtangente es constante e igual a a.*

— Se tiene

$$-\frac{y}{y'} = a$$

o bien

$$-y = a\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$$

Integrando

$$\log y = -\frac{x}{a} + \log C$$

que se puede poner en la forma

$$y = C \cdot e^{-x/a}$$

que es una curva exponencial.

48. Ecuación de la normal. — La normal MN (fig. 42) es la perpendicular a la tangente en el punto (x_0, y_0) de la curva, y su pendiente es, por tanto

$$m_n = -\frac{1}{y'_0},$$

siendo su ecuación

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)} \qquad (1)$$

o bien

$$y'_0(y - y_0) + (x - x_0) = 0.$$

Si la ecuación está bajo la forma $f(x, y) = 0$, la normal será

$$y - y_0 = \frac{f'}{f'_{x_0}}(x - x_0)$$

o bien

$$(y - y_0)f'_{x_0} - (x - x_0)f'_{y_0} = 0$$

Ejemplos. — 1.° *Hallar la ecuación de la normal a la elipse en el punto en que* $x_0 = c$ *(como recordaremos,* c *es la semidistancia focal).*

— Como se había hecho $a^2 - c^2 = b^2$, la ecuación de la elipse nos proporciona y_0:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

o bien

$$c^2b^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

e

$$y_0^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2},$$

de donde

$$y_0 = \frac{b^2}{a}.$$

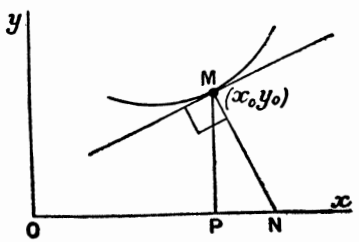

FIG. 42

La ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nos da

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

y, en el punto considerado se tendrá

$$y'_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2} = -\frac{c}{a}.$$

La ecuación de la normal será

$$y - \frac{b^2}{a} = \frac{a}{c}(x - c) = \frac{ax - ac}{c},$$

o bien

$$acy - cb^2 = a^2x - a^2c$$
$$acy - a^2x + c(a^2 - b^2) = 0$$

y por último

$$acy - a^2x + c^3 = 0.$$

2.° *Hallar la curva cuyas normales pasan por un punto fijo.*

Consideremos ese punto como origen, debiendo verificarse la ecuación de la normal para $x = 0$ e $y = 0$, la ecuación (1) da:

$$-y_0 = \frac{x_0}{y'_0},$$

y debiendo cumplirse esto para un punto cualquiera (x, y) de la curva, se tendrá

$$-y = \frac{x}{y'}$$

o bien

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$
$$y\,dy = -x\,dx.$$

Integrando

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

de donde

$$x^2 + y^2 = 2C,$$

que representa una familia de circunferencias.

49. Subnormal. — Sea la curva $y = f(x)$ y un punto $M(x_0, y_0)$. Tracemos la tangente en ese punto y la normal MN. Se llama *subnormal* a la proyección PN de la normal sobre el eje de las x (fig. 42).

Siendo la normal

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0),$$

la abscisa del punto N, se obtiene haciendo $y = 0$:

$$x = y_0 y'_0 + x_0.$$

Por consiguiente se tendrá

$$\text{subnormal PN} = \text{ON} - \text{OP}$$
$$= (y_0 y'_0 + x_0) - x_0$$
$$= y_0 y'_0,$$

y para un punto M cualquiera:

$$\boxed{\text{subnormal} = yy'}$$

Ejemplo. — *¿Cuál es la curva cuya subnormal es constante?* Se tendrá

$$yy' = \mathrm{K}$$

o bien

$$y\,dy = \mathrm{K}\,dx.$$

Integrando

$$\frac{y^2}{2} = \mathrm{K}x + \mathrm{C}$$

$$y^2 = 2\mathrm{K}x + \mathrm{C},$$

que es una familia de parábolas.

Longitud de la normal. La figura 42 nos proporciona inmediatamente

$$\mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{MP}^2 + \mathrm{PN}^2} = \sqrt{y_0^2 + y_0^2 y_0'^2},$$

y, para un punto cualquiera (x, y):

$$\mathrm{MN} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

50. Propiedad óptica de la parábola. — Consideremos un espejo plateado, de forma parabólica, como los faros de un vehículo. Si se coloca en el foco F una fuente luminosa puntual, vamos a ver que todos los rayos luminosos que parten de F y chocan contra el espejo en todos sus puntos, son reflejados paralelamente al eje. Se obtiene entonces un haz de luz paralela, de aquí el nombre de faro.

— Supuesta conocida la ley de reflexión de la luz, que dice que el ángulo de incidencia es igual que el ángulo de reflexión, consideremos la parábola $y^2 = 2px$ de la figura 43, y sea M un punto cualquiera. Tracemos la tangente MT y la normal MN. Hemos visto que la subtangente TP es igual, en valor absoluto, al doble de la abscisa x del punto M, y que la subnormal es igual a p

$$|\,\mathrm{TP}\,| = 2x \qquad \text{y} \qquad \mathrm{PN} = p.$$

De ello resulta, puesto que F es el foco,

$$|\,\mathrm{OT}\,| = x \qquad y \qquad |\,\mathrm{FT}\,| = x + \frac{p}{2}.$$

Por otra parte, como el radio vector FM es también igual a $x + \frac{p}{2}$ (ver la definición de la parábola), se tiene

$$FT = FM,$$

y el triángulo ETM es isósceles.

Por último, ya que $PN = p$, se obtiene

$$FN = ON - OF = (x + p) - \frac{p}{2}$$

$$= x + \frac{p}{2} = FM,$$

y el triángulo NFM es también isósceles.

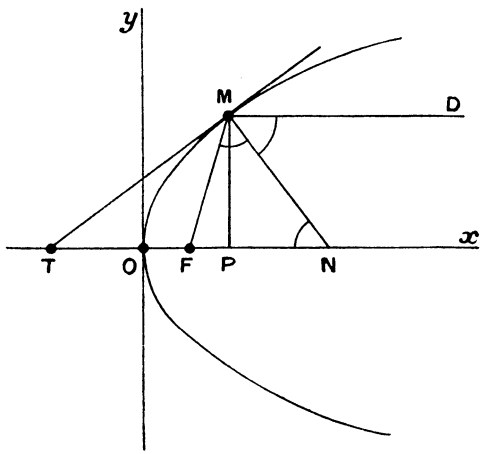

FIG. 43

Tracemos por M una paralela al eje, y siendo MN la perpendicular a la tangente en M, el ángulo FMN es el ángulo de incidencia del radio luminoso que parte de F y el ángulo NMD es el ángulo de reflexión, *y por tanto son iguales,* cualquiera que sea el punto M. Esto explica las propiedades reflectoras de la parábola utilizada en óptica y en radio para realizar una emisión dirigida con ondas cortas. Todos los rayos que parten del foco F se reflejan paralelamente al eje Ox.

Hay que hacer resaltar y pensar, lo inconcebible que es, que esta propiedad fundamental y preciosa de la parábola no aparezca nunca en los libros de Matemáticas Superiores! Es probable que sus autores se creyeran deshonrados al poner sus pies a tierra.

Este no es nuestro caso...

51. Tangente a una curva en el origen. — Cuando una curva pasa por el origen, la ecuación de la tangente en ese punto es $y = mx$, siendo fácil hallar su pendiente m:

$$\boxed{m = \text{límite}\,\frac{y}{x \to 0}}$$

— En efecto, sea un punto M(x, y) sobre la figura 44. Tracemos la secante OM, siendo su pendiente $\frac{y}{x}$. Cuando M se aproxima al origen, la secante se transforma en tangente a la curva en el límite, es decir, para $x = 0$. Pudiéndose encontrar varias pendientes, existen por tanto varias tangentes.

Ejemplo. — Sea la estrofoide

$$y = \pm\, x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

que pasa por el origen, ya que para $x = 0$ se tiene $y = 0$. La pendiente de su tangente en el origen es

$$m = \lim \frac{y}{x \to 0} = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \to \pm\, 1,$$

existiendo entonces dos tangentes

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x.$$

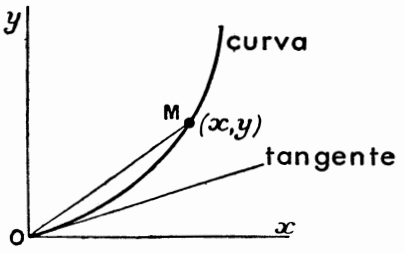

FIG. 44

Por otra parte, la curva es simétrica con relación al eje de las x, debido al doble signo ± delante del radical: para un valor de x, existen dos valores de y, iguales y de signos contrarios.

La curva no es real más que si se verifica

$$\frac{a - x}{a + x} > 0$$

o

$$\frac{a^2 - x^2}{(a + x)^2} > 0 \qquad \text{es decir} \qquad -x^2 + a^2 > 0$$

lo que da

$$-a < x < +a.$$

Además, $y = 0$ para $x = a$, e $y = \infty$ para $x = -a$.

Por último, escribiendo y en la forma

$$y = \sqrt{\frac{x^2(a-x)}{a+x}} = \sqrt{\frac{ax^2 - x^3}{a+x}}$$

es fácil hallar la derivada, que se anula (después de simplificar) para $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$, el cual es un máximo. Así obtenemos la curva de la figura 45.

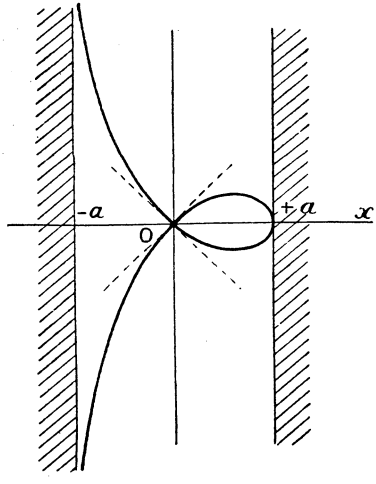

FIG. 45

52. Teorema. — *Cuando una curva es algebraica, se obtiene la ecuación de las tangentes en el origen, igualando a cero el conjunto de los términos de grado menor.*

— En efecto, consideremos la curva

$$f(x, y) = 0.$$

Si pasa por el origen debe verificarse que para $x = 0$ es $y = 0$, no encerrando términos constantes. Ordenemos ahora todos sus términos con relación a las potencias crecientes de x y de y:

$$f(x, y) = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + fx^3 + \ldots = 0. \qquad (1)$$

Las derivadas parciales son

$$f'_x = a + 2cx + dy + 3fx^2 + \ldots$$
$$f'_y = b + dx + 2ey + \ldots$$

que para $x = 0$ e $y = 0$, dan

$$f'_x = a \quad \text{y} \quad f'_y = \text{b}.$$

La ecuación *general* de las tangentes

$$y - y_0 = -\frac{f'_x}{f'_y}(x - x_0)$$

que si a y b *no son nulos al mismo tiempo, nos da en el origen:*

$$\text{Y} = -\frac{a}{b}\text{X}$$

o bien

$$bY + aX = 0$$

ecuación que se obtiene a partir de la (1) sin más que anular los términos de menor grado

c.q.f.d.

Ejemplo. — Sea la estrofoide

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$$

— Anulando los términos de menor grado, obtenemos

$$(x^2 - y^2) = 0$$

de donde

$$y = \pm x$$

que representa dos tangentes.

— Podría ocurrir, en el estudio anterior, que fueran nulos a y b simultáneamente, caso que abordaremos detalladamente más adelante, pues en este caso tendremos en el origen *un punto singular.*

53. Posición de una curva con relación a su tangente. — Hemos visto anteriormente el método de hallar la ecuación de la tangente, pero ahora *se trata de saber si la curva está por encima o por debajo de ella,* lo que en resumidas cuentas es hallar de qué lado se encuentra la concavidad de la curva.

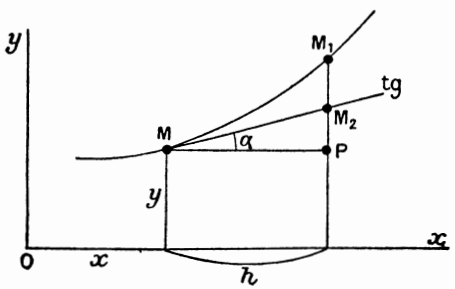

FIG. 46

— En la figura 46, tomemos un punto cualquiera $M(x, y)$ de la curva. Vamos a «analizar» lo que pasa alrededor de ese punto.

Incrementando x en una cantidad h, M se tranforma en M_1 e y en y_1

$$y_1 = f(x + h).$$

Consideremos el punto M_2 sobre la tangente a la curva, y sea y_2 su ordenada. Tenemos

$$y_2 = y + PM_2$$
$$= y + h \cdot \operatorname{tg} \alpha = y + h \cdot f'(x).$$

Desarrollemos en serie de TAYLOR la función $y = f(x)$:

$$f(x + h) = y_1 = f(x) + \frac{h}{2!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

o bien

$$y_1 = y_2 + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + \ldots$$

y despreciando los términos en h^3, h^4, etc.,

$$y_1 - y_2 = M_1M_2 = \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x).$$

Por tanto, el signo de M_1M_2 dependerá del signo de $f''(x)$ (supuesta distinta de cero), de donde se concluye:

1.° si $f''(x) > 0$, $y_1 > y_2$,

la curva está por encima de su tangente y su concavidad está dirigida hacia las y positivas,

2.° si $f''(x) < 0$, $y_1 < y_2$,

la curva se encuentra por debajo de su tangente y su concavidad está dirigida hacia las y negativas. La figura 47 resume lo anterior.

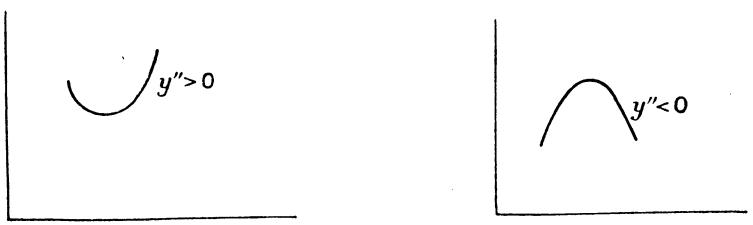

FIG. 47

Pero, si ¿$f''(x) = 0$?

Se tiene entonces

$$y_1 - y_2 = \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

que cambiará de signo con el de $h(+h$ o $-h)$; en consecuencia, por una parte, la curva se encontrará por encima de su tangente, y por otra por debajo, se tiene entonces un punto de *inflexión*. En el tomo I hemos precisado la forma de esos puntos de inflexión (§ 45, 48).

En resumen, para obtener un punto de inflexión hay que anular la derivada segunda

$$\boxed{y'' = 0}$$

condición necesaria pero no suficiente.

En efecto, sea la función

$$y = x^4$$

Se tiene

$$y' = 4x^3 = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

e $$y'' = 12x^2 \quad \textit{que se anula para} \quad x = 0.$$

No obstante, no se obtiene punto de inflexión más que para $x = 0$, ya que

$$\begin{array}{lll} \text{para} & x < 0, & y' < 0 \quad \text{e } y \text{ decrece} \\ \text{para} & x > 0, & y' > 0 \quad \text{e } y \text{ crece.} \end{array}$$

Se tiene pues un mínimo de y para $x = 0$.

— Así se ve, que la condición suplementaria, para que exista un punto de inflexión, cuando $y'' = 0$, es que la derivada y' *no cambie de signo*, es decir que la función y sea constantemente creciente o constantemente decreciente a un lado y a otro del valor crítico (que es aquel para el que $y'' = 0$).

Esto es lo que se expuso en el tomo I, párrafos 45 y 48.

Así, por ejemplo, sea $y = x^3$. Se tiene

$$\begin{array}{lll} y' = 3x^2 = 0 & \text{para} & x = 0 \\ y'' = 6x = 0 & \text{para} & x = 0. \end{array}$$

Pero al ser y' siempre positiva, la función es siempre creciente y se tiene un punto de inflexión con tangente horizontal cuando $x = 0$.

Observación. — Otra manera de hallar los puntos de inflexión (utilizada en el tomo II, §102), consiste en buscar los puntos en que el radio de curvatura es infinito.

Ya que

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

se tiene

$$y'' = 0.$$

En efecto, en un punto tal de inflexión, puede asimilarse la curva

a una recta en una región pequeña, y $\rho = \infty$; pero con la condición de que *la derivada primera y' no varíe de signo.*

De todas maneras, el signo de y'' indica el sentido de la concavidad de la curva en un punto cualquiera.

54. Ejemplos.

1.° *Sea la curva* $x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$.

— Se tiene

$$y' = 3x^2 - 6x + 5$$
$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1) = 0$$

y de aquí $x = 1$. Entonces, y' es un trinomio que no tiene raíces reales y es siempre positiva. La función y es entonces siempre creciente y se tiene un punto de inflexión para $x = 1$.

2.° *Sea la curva* $y = \operatorname{sen} x$.

— Se tiene

$$y' = \cos x \quad \text{e} \quad y'' = -\operatorname{sen} x = 0,$$

de donde

$$x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \text{ etc.}$$

De 0 a π, y'' es < 0 y la curva es cóncava hacia abajo; y de π a 2π, y'' siendo positiva la curva es cóncava hacia arriba.

3.° A continuación se presenta un ejemplo complicado e interesante, que mostrará cuán útil es el estudio de la concavidad para el trazado de las curvas.

Estudiar y trazar la curva de la función

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x^3 - 4)}{2}}.$$

— Evidentemente, debe tenerse

$$x(x^3 - 4) > 0;$$

entonces, $x^3 - 4$ es un trinomio que es negativo entre sus raíces $+2$ y -2, y de ello resulta que

para x comprendido entre -2 y 0, y es real,
para x comprendido entre $+2$ e $+\infty$, y es real,

e y es imaginaria para los restantes valores de x.

Fácilmente se encuentra, lo que el lector debe verificar (aunque los cálculos sean un poco laboriosos pero simples):

$$y' = \frac{3x^2 - 4}{4\sqrt{2x(x^2-4)}} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{8\sqrt{2x^3(x^2-4)^3}}$$

y' se anula para $3x^2 - 4 = 0$, de donde

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}},$$

siendo la raíz negativa la única comprendida en el intervalo en que y es real.

En cuanto a y'', tiene el signo de su numerador, trinomio bicuadrado, que tiene dos raíces en x^2, pero que únicamente el valor

$$x_1 = 2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

está comprendida entre $+2$ y $+\infty$: es un punto de inflexión, pues y' es positivo si x es $<$ ó $>$ que x_1, y crece a un lado y a otro de este punto. Lo anterior se puede condensar en la tabla siguiente

x	-2		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0	$+2$		x_1		$+\infty$
y'	∞	$+$	0	$-$	∞	∞	$+$		$+$	
y''		$-$		$-$			$-$	0	$+$	
y	0	↗	$0{,}62$ máx	↘	0	0	↗	Inflex.	↗	$+\infty$

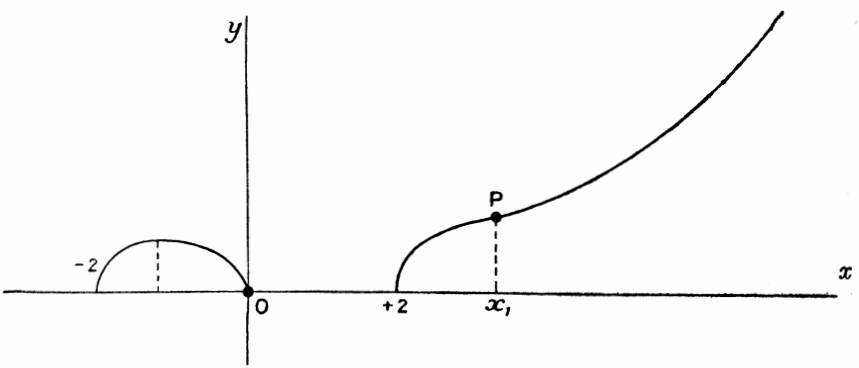

FIG. 48

Se ve así que entre -2 y 0, la concavidad está dirigida hacia abajo, y lo mismo ocurre entre $+2$ y x_1, mientras que de x_1 a $+\infty$, está dirigida hacia arriba. La figura 48 resume lo anterior.

PUNTOS SINGULARES

55. Diferentes clases de puntos singulares. — Consideremos una curva y la tangente en un punto cualquiera de ella M. Si con centro en M y radio infinitamente pequeño (fig. 49) se describe una circunferencia que corta a la curva en A y en B, el ángulo AMB formado por los dos radios tiende en general a 180° cuando el radio del círculo tiende a cero, pero si esto no ocurre, el punto M es un punto singular.

Existen varias clases de puntos singulares.

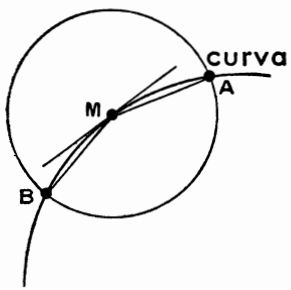

FIG. 49

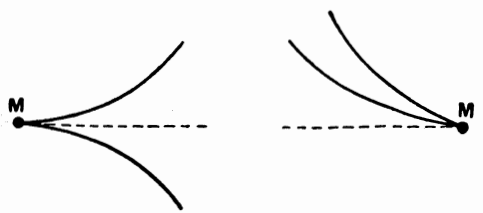

FIG. 50

Un punto múltiple tiene lugar si el círculo anterior corta a la curva en más de dos puntos. Se dice que es de orden p, si p ramas de la curva pasan por ese punto. (En la estrofoide, por ejemplo, para $x = 0$, se tiene un punto doble.)

Un punto de retroceso se obtiene cuando en ese punto se detienen dos ramas de la curva tangentes a la misma recta. Existen dos tipos (fig. 50) según la posición de la tangente.

Un punto de detención se obtiene cuando se termina bruscamente una rama de la curva (el círculo no encuentra a la curva más que en un solo punto).

Un punto anguloso existe cuando las tangentes a la curva trazadas en ese punto forman entre sí un ángulo determinado (no nulo).

Observación. — Las curvas algebraicas no tienen ni punto de detención ni punto anguloso.

56. Determinación de los puntos singulares. — Consideremos la curva de ecuación $f(x, y) = 0$, en la que para calcular la tangente en un punto es necesario hallar la derivada en él, dándonos ésta la pendiente de la tangente

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{dy}},$$

expresión en la que se sustituirá x e y por las coordenadas del punto considerado.

Puede ocurrir que se verifique *simultáneamente* en ese punto

$$\frac{df}{dy} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{df}{dy} = 0,$$

diciéndose entonces que se tiene un punto singular, ya que la derivada o pendiente de la tangente está indeterminada.

Apliquemos la regla de L'Hôpital sin olvidar que y es función de x, y que $\dfrac{df}{dx}$ y $\dfrac{df}{dy}$ contienen probablemente a x e y; entonces, hay que hallar la derivada de una función compuesta, es decir la suma de las derivadas, una con relación a x y la otra con relación a y (que es función de x):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{N'}{D'} = -\frac{\dfrac{d^2f}{dx^2} + \dfrac{d^2f}{dxdy} \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2f}{dxdy} + \dfrac{d^2f}{dy^2} \cdot \dfrac{dy}{dx}}, \tag{1}$$

de donde se deduce, quitando denominadores

$$\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2f}{dx^2} = 0,$$

ecuación de segundo grado en $\dfrac{dy}{dx}$ que dará raíces reales si $\Delta > 0$, es decir, si

$$\boxed{\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \frac{d^2f}{dx^2} > 0} \tag{2}$$

y, en ese caso, se tendrán dos tangentes en el punto considerado. Si este valor es nulo, existe sólo una tangente, y se trata de un punto de retroceso.

Dando esta ecuación las pendientes de las tangentes, pueden escribirse las ecuaciones de las mismas.

57. Ejemplos de puntos singulares.

1.° *Consideremos la parábola cúbica*

$$ay^2 = x^3. \qquad (a > 0)$$

— Exige que x sea > 0, siendo además simétrica con relación al eje de las x.

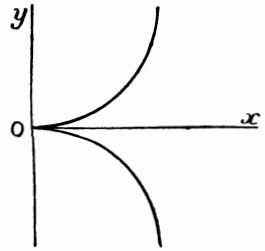

FIG. 51

Se tiene

$$f(x, y) = ay^2 - x^3 = 0,$$

y

$$\frac{df}{dx} = -3x^2 \qquad \frac{df}{dy} = 2ay.$$

Ambas expresiones son nulas para

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0;$$

la tangente en el origen $\left(y' = \frac{0}{0}\right)$ es indeterminada y se tiene un punto singular. Precisemos su naturaleza.

Se tiene

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -6x \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 2a \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2f}{dxyd} = 0.$$

Sustituyendo en la ecuación (2), se observa que el discriminante es positivo, y entonces se trata de un punto doble. Por último, la ecuación (1) nos da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N'}{D'} = -\frac{-6x + 0 \cdot y'}{0 + 2a \cdot y'} = \frac{6x}{2ay'}$$

o

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3x}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{3x}{a}}$$

que da las pendientes de las dos tangentes, teniéndose un punto de retroceso (fig. 51).

2.° *Sea la curva* $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$.

— Obliga a que $x > 0$. Para $x = 0$, $y = 0$, y para tener la tangente en ese punto calculemos la relación $\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = x\,(1 \pm \sqrt{x})$$

que para $x = 0$ da 0, siendo entonces el eje de las x tangente a la curva.

Existen dos ramas de curvas, una tomando $+\sqrt{x}$ y la otra con $-\sqrt{x}$. Para la primera y crece indefinidamente, y para la otra

$$y = x^2(1 - \sqrt{x});$$

al principio y crece, después decrece hasta $x = 1$ en que y se anula; a continuación $y \to -\infty$, lo que da la figura 52, en donde se tiene un punto de retroceso de segunda especie, encontrándose las curvas del mismo lado de la tangente.

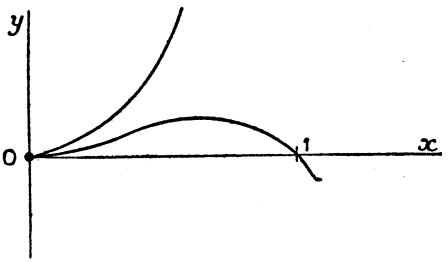

FIG. 52

El máximo de la segunda rama se obtiene anulando la derivada de $y = x^2(1 - \sqrt{x})$, es decir

$$y' = 2x(1 - \sqrt{x}) + x^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$$

de donde

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{16}{25},$$

en donde la tangente es horizontal.

3.° *Sea la lemniscata*

$$(y^2 + x^2)^2 = K^2(y^2 - x^2),$$

que es el lugar de los puntos tales que el producto de las distancias MF *y* MF' *a dos puntos fijos* F *y* F' *es constante e igual al cuadrado de la semidistancia* $OF = \frac{K}{\sqrt{2}}$ *de esos dos puntos* (fig. 53).

—La curva pasa por el origen y es simétrica con relación al eje de las x y con relación al eje de las y (ya que no contiene más que x^2 o y^2).

Se tiene

$$f(x, y) = (y^2 + x^2)^2 - K^2(y^2 - x^2) = 0,$$

de donde

$$\frac{df}{dx} = 2(y^2 + x^2) \cdot 2x + 2K^2x = 4x^3 + 4y^2x + 2K^2x$$

y

$$\frac{df}{dy} = 2(y^2 + x^2) \cdot 2y - 2K^2y = 4y^3 + 4x^2y - 2K^2y,$$

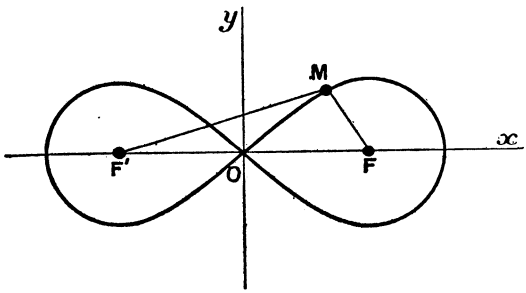

FIG. 53

y se observa que para $x = 0$ e $y = 0$, se anulan esas derivadas. Calculemos entonces las derivadas segundas en ese punto:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 + 4y^2 + 2K^2 = 2K^2$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = 8xy = 0$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 12y^2 + 4x^2 - 2K^2 = -2K^2.$$

Las tangentes en el origen vienen dadas por la ecuación (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N'}{D'} = -\frac{2K^2 + 0 \cdot \dfrac{dy}{dx}}{0 - 2K^2 \cdot \dfrac{dy}{dx}}$$

o bien

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-2K^2}{-2K^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

las dos tangentes son, pues, las bisectrices de los ejes, cortándose las dos ramas de la curva en ángulo recto.

3.° *Sea el folium de* DESCARTES (fig. 54):

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

— Se tiene

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 3ay$$

$$\frac{df}{dy} = 3y^2 - 3ax$$

que se anulan para $x = 0$ e $y = 0$, teniéndose entonces un punto singular. Calculemos las derivadas segundas:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 6y \qquad \frac{d^2f}{dxdy} = -3a,$$

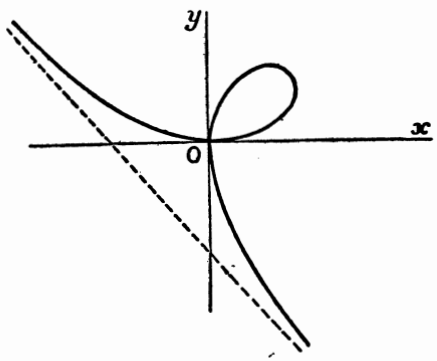

FIG. 54

que, para $x = y = 0$ dan

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dxdy} = -3a.$$

La ecuación (2) da un discriminante positivo, por consiguiente tiene dos raíces, viniendo dadas sus pendientes por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N'}{D'} = -\left(\frac{0 - 3a \cdot \dfrac{dy}{dx}}{-3a + 0 \cdot \dfrac{dy}{dx}}\right)$$

de donde

o $$0 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6a\frac{dy}{dx} = 0$$

ecuación que proporciona dos raíces: $\dfrac{dy}{dx} = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \infty$, y por tanto la curva es tangente a los dos ejes.

Nota. — Sencillamente, se podrían haber calculado las *tangentes en el origen,* utilizando el teromea dado anteriormente y que consiste en anular los términos de grado menor.

Para la *lemniscata*: $K^2(y^2 - x^2) = 0$

o bien

$$(y + x)(y - x) = 0$$

es decir

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x$$

que son las dos bisectrices.

Para el folium de DESCARTES: $-3axy = 0$

se tiene

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

lo que indica que las dos tangentes son los ejes de coordenadas.

58. Otro método para hallar puntos múltiples. — Al principio de este capítulo hemos visto que un punto múltiple es aquel por el que pasan p ramas de curvas, verificándose en un punto tal

$$f'_x = 0 \quad \text{y} \quad f'_y = 0,$$

la derivada

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

está indeterminada. Trasladando el origen al punto múltiple, se reduce el problema a estudiar las tangentes a la curva en el origen, al anular los términos de grado menor y expresando la curva en la forma

$$f(x, y) = 0.$$

Ejemplo. — Sea la curva

$$y^3 + x^3 + 3(x + y) - 3x(x + y) - 1 = 0. \tag{1}$$

— Se tiene

$$f'_x = 3x^2 + 3 - 6x - 3y = 3(x - 1)^2 - 3y$$
$$f'_y = 3y^2 + 3 - 3x = 3y^2 - 3(x - 1),$$

fácilmente se ve así que esas dos derivadas se anulan al mismo tiempo para $x = 1$ e $y = 0$, que es un punto múltiple. Trasladando el origen a ese punto por medio de las fórmulas de cambio de coordenadas:

$$x = X + 1 \qquad y = Y.$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

$$X^3 + Y^3 - 3YX = 0,$$

y las tangentes en el origen vienen dadas por $XY = 0$, de donde $X = 0$ e $Y = 0$.

CAPITULO VI

ESTUDIO DE ASINTOTAS

59. Definición de asíntota. — La asíntota es una recta que se aproxima indefinidamente a una curva sin llegar a tocarla, o de una manera más precisa se dice que una curva es asintótica a una recta cuando un punto móvil sobre la curva, se aproxima indefinidamente a esta recta al mismo tiempo que se aleja hacia el infinito el punto.

Existen asíntotas paralelas a los ejes y asíntotas oblicuas, y su estudio es indispensable para el trazado preciso de una curva.

Por tanto, el objeto de este estudio es conocer si existen asíntotas, o mejor aún, hallar la ecuación de aquéllas para poderlas trazar.

Por ahora, consideramos las curvas en coordenadas cartesianas, y, por tanto, tendremos que estudiar dos casos según que la curva venga expresada en forma explícita $y = f(x)$, o en forma implícita $f(x, y) = 0$.

Primer caso: la curva viene expresada en forma explícita $y = f(x)$.

60. Asíntotas paralelas a los ejes.

Teorema. — *Para que una recta $x = a$ (por tanto paralela al eje vertical) sea asíntota de una curva $y = f(x)$, basta con que la función y tienda a infinito cuando se hace $x = a$ en su ecuación.*

— En la práctica, basta con hallar los valores finitos de x que hacen a y infinito.

Si la función y es un cociente de dos polinomios, basta anular el denominador.

— Por ejemplo, la estrofoide

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

nos dará $a - x = 0$, de donde $x = a$.

Análogamente, la curva

$$y = \frac{2}{(x+3)^2}$$

tiene como asíntota vertical la recta $x = -3$.

2.° *Paralelas al eje de las x.*

Para hallar la ordenada de la asíntota horizontal, basta con hallar el límite de y cuando x tiende a infinito, debiendo ser este límite finito.

— Por ejemplo, $y = \dfrac{2x-3}{4x+2}$ tiene una asíntota horizontal, pues para $x = \infty$

$$y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2 - \dfrac{3}{x}}{4 + \dfrac{2}{x}} = \frac{1}{2},$$

y ésta es la ecuación de la asíntota.

61. Asíntotas oblicuas. — Utilizaremos el método de CAUCHY, que es muy cómodo, simple y claro.

Dispongamos la ecuación de la asíntota oblicua en la forma

$$y = mx + p,$$

en donde hay que calcular m y p

— En la figura 55, tomemos un punto M cualquiera de la curva que tiene una asíntota oblicua. Tracemos la perpendicular MA sobre la asíntota y también la ordenada MB. El punto N es la ordenada y de la asíntota.

— Si $x \to \infty$, MA $\to 0$ así como MN, y siendo esta longitud variable con x, hagamos

$$\text{MN} = \varphi(x)$$

que es una función desconocida que tiende a cero.

La ordenada del punto M de la curva será igual a la de la asíntota aumentada en MN:

$$y = f(x) = \text{BN} + \text{NM} = mx + p + \varphi(x) \qquad (1)$$

de donde

$$m = \frac{y - p - \varphi(x)}{x} = \frac{y}{x} - \frac{p}{x} - \frac{\varphi(x)}{x}.$$

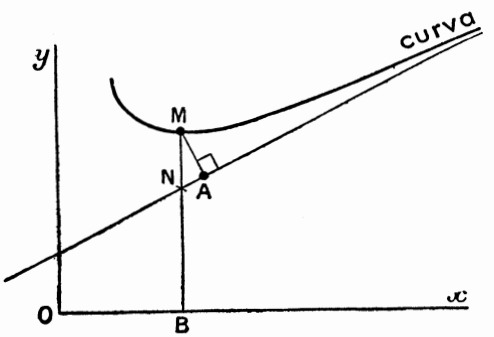

FIG. 55

Pasemos al límite: si $x \to \infty$, resulta
es decir

$$m = \text{límite}\ \frac{y}{x} - \frac{p}{\infty} - \frac{0}{\infty}$$

sea

$$\boxed{m = \text{límite de}\ \frac{y}{x \to \infty} = \left[\frac{y}{x}\right]_{x=\infty}}$$

conociendo m, se sustituye su valor en la ecuación (1) y se deduce p:

$$p = y - mx - \varphi(x),$$

para $x = \infty$, $\varphi(x)$ tiende a cero, y se tiene

$$\boxed{p = \text{límite de}\ (y - mx)_{x=\infty}}$$

62. Ejemplos.

1.° *Sea*

$$y = 2x + \frac{4}{x + 5}$$

— Se tendrá

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim \left(\frac{2x + \frac{4}{x+5}}{x} \right) = \lim \left(2 + \frac{4}{x^2 + 5x} \right),$$

para $x = \infty$, se obtiene $m = 2$.

Inmediatamente se calcula p, es decir

$$p = \lim \left(2x + \frac{4}{x+5} - 2x \right) = \lim \frac{4}{x+5} = 0,$$

y la ecuación de la asíntota será entonces $y = 2x$.

2.° *Sea*

$$y = \frac{4x^2 - x - 4}{x - 1}$$

— A primera vista se ve que tiene una asíntota vertical para $x = 1$. Calculemos la pendiente m de la asíntota oblicua

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim \left(\frac{4x^2 - x - 4}{x^2 - x} \right)_{x = \infty} = \frac{\infty}{\infty} = 4.$$

Por último

$$p = \lim (y - mx) = \lim \left(\frac{4x^2 - x - 4}{x - 1} - 4x \right)$$

$$= \lim \left(\frac{4x^2 - x - 4 - 4x^2 + 4x}{x - 1} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{3x - 4}{x - 1} \right) = \frac{\infty}{\infty} = 3.$$

y la ecuación de la asíntota oblicua es

$$y = 4x + 3.$$

3.° *Sea*

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

— Se tiene en principio una asíntota vertical

$$x = 1.$$

Para la asíntota oblicua

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} \right)_{x = \infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Por último

$$p = \lim (y - mx) = \lim \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} - x\right)$$

$$= \lim \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}\right)$$

$$= \lim \left(\frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right) = \frac{\infty}{\infty} = 5,$$

y la ecuación de la asíntota será $y = x + 5$.

4.° Estudiemos un ejemplo más completo, que vamos a aprovechar para trazar con exactitud la curva de la función siguiente

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

— Se observa que y no existe más que para

$$\frac{x^3}{x-1} > 0, \qquad \text{o} \qquad \frac{x^3(x-1)}{(x-1)^2} > 0$$

o bien

$$x^3(x-1 > 0 \qquad \text{de donde} \qquad 0 > x > 1.$$

Se ve también que para $x = 1$ existe una asíntota vertical, ya que en ese momento $y = \infty$.

Calculemos y'

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \cdot \frac{(x-1)3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(3x-3-x)}{2\sqrt{x^3}(x-1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{x}(2x-3)}{2(x-1)^{3/2}},$$

que se anula para $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$, siendo infinita para $x = 1$. Por consiguiente, es positiva para $x = \frac{3}{2}$, negativa para $x < \frac{3}{2}$ y se tiene un mínimo de y para este valor. También se ve que, si se escribe en la forma siguiente

$$y' = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} = \frac{x(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

es positiva para $x < 0$.

La asíntota oblicua tiene por ecuación $y = mx + p$, con

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = \lim \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \right) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \to 1,$$

y

$$p = \lim (y - mx) = \lim \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right)$$

$$= \lim \left(\frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} \right) = \lim \left[\frac{x^3 - x^2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x \right)} \right]$$

$$= \lim \frac{x^3}{D} = \frac{\infty}{\infty}$$

pero al dividir numerador y denominador por x^2, se obtiene 1/2. La ecuación de la asíntota es entonces

$$y = x + \frac{1}{2}.$$

Resumamos lo anterior en la tabla siguiente

x	$-\infty$		0	1		$3/2$		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Para $x = 0$, la curva es también tangente al eje de las x.

Se obtiene la curva de trazo lleno de la figura 56, pero si se considera el signo — ante el radical de y, se obtendría la curva de trazo punteado, simétrica de la primera.

5.° *Sea*

$$y = \frac{2x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$$

— Se determinan rápidamente dos asíntotas verticales ($y = \infty$) haciendo

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \text{de donde} \qquad x = \pm 1.$$

Efectuando la división del numerador de y por el denominador, se obtiene fácilmente

$$y = 2x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Hallemos ahora la asíntota oblicua $y = mx + p$.

Se tiene

$$m = \lim \frac{y}{x} \quad \text{para} \quad x = \infty, \quad \text{es decir} \quad m = 2$$

y

$$p = \lim (y - mx) = \lim \left(2x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1} - 2x\right)$$

$$p = 3,$$

siendo entonces la ecuación de la asíntota $y = 2x + 3$.

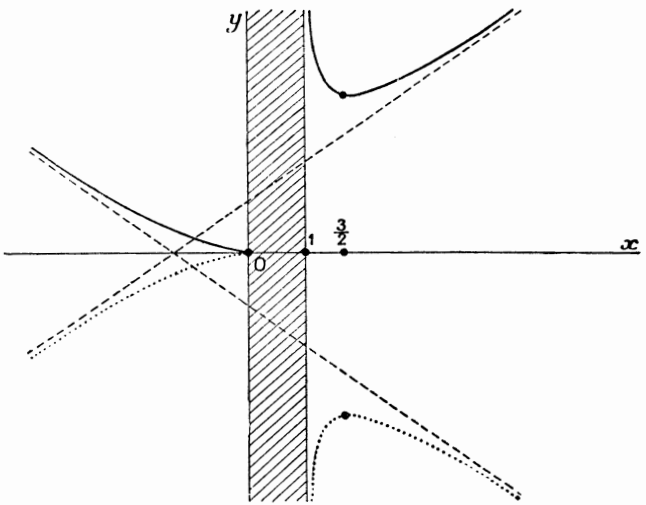

FIG. 56

La derivada de y, realizados todos los cálculos, es

$$y' = \frac{2x^4 - 5x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

que se anula para

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}, \quad \text{de donde} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 \approx \pm \dfrac{3}{2} \\ x_2 \approx \pm \dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

La derivada tiene el signo de $2x^4 - 5x^2 + 1$, que es un trinomio bicuadrado, cuya derivada $8x^3 - 10x = 0$ se anula para

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y como para $x = 0$, el trinomio es igual a $+1$, se tiene la figura 57 como *curva representativa del trinomio,* que presenta un máximo y

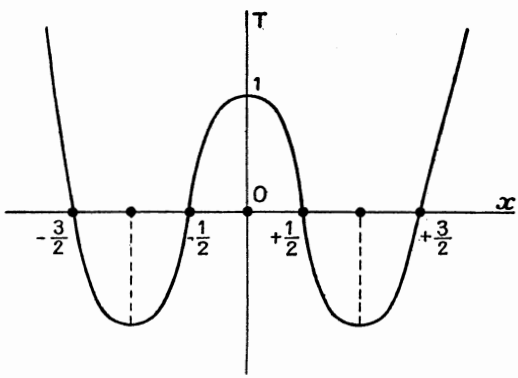

FIG. 57

dos mínimos. Esta curva nos da los signos de la derivada, obteniéndose la tabla siguiente

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	$2+$	$0-$	$\infty-$	$0+$	$1+$	$0-$	$\infty-$	$0+$	2
y	$-\infty$ ↗	$-\frac{6}{5}$ ↘	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	$\frac{8}{3}$ ↗	3 ↗	$\frac{10}{3}$ ↘	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	$\frac{36}{5}$ ↗	$+\infty$
		max		min		max		min	

Entonces se obtiene la curva de la figura 58.

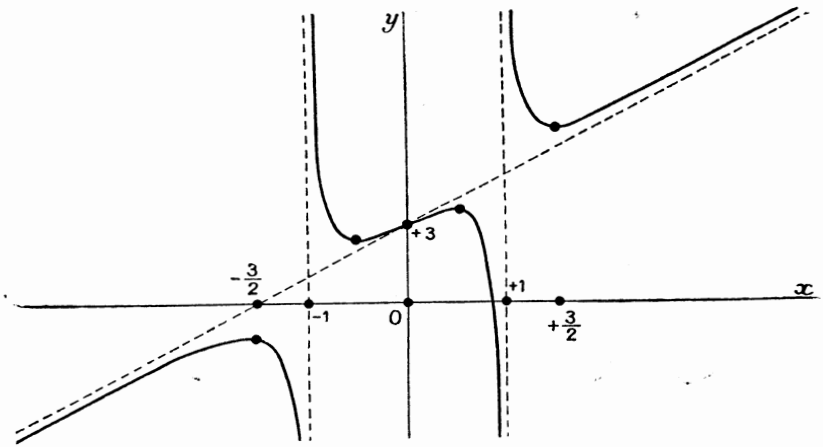

FIG. 58

Nota. — Podría ocurrir que al tratar de hallar la asíntota oblicua, se encontrara

$$\text{límite de } \frac{y}{x} = m \qquad \text{(para } x = \infty\text{)},$$

y

$$p = \text{límite } (y - mx) = \infty.$$

En este caso la asíntota se encuentra en el infinito, y se dice que la curva tiene *una dirección asintótica,* cuya pendiente es m.

En realidad, el límite del cociente $\frac{y}{x}$ da la pendiente de la curva para $x = \infty$.

Segundo caso: la curva viene expresada en la forma f(x, y) = 0.

63. Ecuación de las asíntotas. — Consideremos, para comenzar, una curva de segundo grado

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \qquad (1)$$

y supongamos $A \neq 0$. La ecuación dará dos valores de y.

— Sabemos, que para hallar las direcciones asintóticas, hay que encontrar el límite de $\frac{y}{x}$ para $x = \infty$.

Haciendo $y = mx$, se tendrá

$$Am^2x^2 + Bx \cdot mx + Cx^2 + D \cdot mx + Ex + F = 0$$

o bien

$$x^2(Am^2 + Bm + C) + x(E + Dm) + F = 0$$

$$(Am^2 + Bm + C) + \frac{1}{x}(E + Dm) + \frac{F}{x^2} = 0$$

y, si $x \to \infty$, se tiene

$$Am^2 + Bm + C = 0,$$

así pues, las direcciones asintóticas son paralelas a las dos rectas

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0. \qquad (2)$$

En resumen, se comprueba que basta anular los términos de grado mayor de la ecuación (1) *para obtener la pendiente de las asíntotas.*

Naturalmente, la ecuación (2) no tiene raíces reales en y más que si se verifica

$$B^2 - 4AC \geqslant 0.$$

— Hallemos ahora la ecuación de las asíntotas.

Sea m una raíz de la ecuación (2), que da la pendiente de la asíntota; calculemos una vez más

$$y - mx = p.$$

Se tendrá

$$A(mx + p)^2 + (Bx + D)(mx + p) + Cx^2 + Ex + F = 0$$

o bien

$$x^2(Am^2 + Bm + C) + x(2Amp + Dm + Bp + E) + (Ap^2 + Dp + F) = 0,$$

ahora bien, el valor de m anula al primer paréntesis, y al dividir el resto por x, y hacer $x = \infty$, se tiene:

$$2Amp + Dm + Bp + E = 0,$$

o

$$(2Am + B)p = -Dm - E$$

o también

$$\boxed{p = \frac{-\mathrm{D}m - \mathrm{E}}{2\mathrm{A}m + \mathrm{B}}} \qquad (3)$$

Si se encuentra $p = \infty$, no existen asíntotas, están en el infinito.

Ejemplo. — Sea la ecuación de la hipérbola

$$y^2 - 4xy + 3x^2 + 2y + x - 5 = 0.$$

— Anulemos los términos de mayor grado

$$y^2 - 4xy + 3x^2 = 0,$$

ecuación en y, cuyas raíces son

$$m_1 = +1 \qquad \text{y} \qquad m_2 = +3.$$

Consideremos la primera y calculemos p por la ecuación (3):

$$p_1 = \frac{-\mathrm{D}m - \mathrm{E}}{2\mathrm{A}m + \mathrm{B}} = \frac{-2\cdot 1 - 1}{2\cdot 1 - 4} = \frac{-3}{-2} = +\frac{3}{2}$$

la primera asíntota es, pues, $y = x + \frac{3}{2}$.

Para $m_2 = +3$, se tendrá

$$p_2 = -\frac{-2\cdot 3 - 1}{2\cdot 3 - 4} = -\frac{7}{2}$$

y la segunda asíntota será

$$y = 3x - \frac{7}{2}.$$

Por ese método se obtienen rápidamente las dos asíntotas de la hipérbola.

64. Generalización. — Consideremos una curva cualquiera del grado que sea y expresada en forma implícita $f(x, y) = 0$. Hallemos sus asíntotas.

1.° **Asíntotas paralelas a los ejes.** — Por ejemplo, se encontrarán las asíntotas paralelas al eje de las y hallando los valores finitos de

x que hacen infinita a y. Para esto ordenemos la ecuación con relación a las potencias *decrecientes* de y.

$$f(x, y) = y^m \cdot \varphi_0(x) + y^{m-1} \cdot \varphi_1(x) + y^{m-2} \cdot \varphi_2(x) + \ldots = 0$$

$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \ldots$ son polinomios enteros en x o constantes. Dividiendo por y^m

$$\varphi_0(x) + \frac{1}{y}\varphi_1(x) + \frac{1}{y^2}\varphi_2(x) \ldots = 0$$

y haciendo $y = \infty$, resulta que

$$\varphi_0(x) = 0,$$

como esta ecuación puede tener varias raíces, se tendrán varias asíntotas paralelas al eje de las y, que serán reales o imaginarias, distintas o confundidas.

De aquí la regla:

Regla. — *Se ordena la ecuación de la curva con relación a las potencias decrecientes de y, y se anula el coeficiente de la potencia mayor de y.*

Es evidente que, para hallar las asíntotas paralelas al eje de las x, se ordenaría la ecuación con relación a las potencias decrecientes de x, y se anularía el coeficiente de la potencia mayor de x.

Ejemplos.

1.° *Sea la curva*

$$xy - 2x + 3y - 5 = 0.$$

— Se tiene

$$y(x + 3) - 2x - 5 = 0$$

y la asíntota paralela a Oy es $x = -3$.

También se tiene

$$x(y - 2) + 3y - 5 = 0$$

y la asíntota paralela a Ox es $y = 2$.

2.° *Sea la curva*

$$y^2(4x^2 - 25) - 9x^2 + 16x = 0.$$

El coeficiente de y^3 proporciona las dos asíntotas paralelas a Oy:

$$4x^3 = 25 \quad \text{y} \quad x = \pm \frac{5}{2}.$$

Ordenando con relación a x

$$x^2(4y^2 - 9) + 16x - 25y^3 = 0,$$

se tienen las asíntotas paralelas Ox, que vienen dadas por

$$4y^2 - 9 = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm \frac{3}{2}.$$

2.° **Asíntotas no paralelas a los ejes.** — Consideremos la curva de grado m dada por la ecuación

$$f(x, y) = 0,$$

y ordenémosla *con relación a los productos xy*, que se escribirá en la forma:

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) \ldots = 0;$$

sacando a x *como* factor común:

$$x^m \cdot \varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \cdot \varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-2} \cdot \varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Dividiendo por x^m, se obtiene:

$$\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \varphi_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0, \qquad (1)$$

y, si $x \to \infty$, se tendrá

$$\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0, \qquad (2)$$

y, si la relación $\frac{y}{x}$ tiene un límite (para $x = \infty$), se obtiene

$$\varphi_m(1, m) = 0. \qquad (3)$$

de donde se puede enunciar la regla siguiente:

Regla. — *Para hallar la pendiente de una asíntota no paralela a los ejes, se determinan las raíces de la ecuación que se obtiene anulando los términos de grado mayor de la curva, una vez hecho* $x = 1$ *y sustituido y por m.*

Si en la ecuación (3) se quitan denominadores, se obtiene $\varphi_m(x, y) = 0$, y entonces basta con anular los términos de grado mayor en x y en y, considerados juntos.

65. Ejemplos.

1.° *Sea la curva*

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0.$$

— Ordenándola, se tiene,

$$(y^4 - x^4) + 100a^2x^2 - 96a^2y^2) = 0.$$

Que al sustituir se transforma en la

$$m^4 - 1 = 0 \quad \text{o} \quad (m^2 + 1)(m^2 - 1) = 0$$

o bien

$$(m^2 + 1)(m + 1)(m - 1) = 0,$$

que proporciona las dos direcciones asintóticas

$$m + 1 = 0 \quad \text{de donde} \quad m = -1$$

$$m - 1 = 0 \quad \text{de donde} \quad m = 1,$$

siendo entonces las ecuaciones de las asíntotas $y = -x$ e $y = x$.

2.° *Sea la cónica*

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

— Anulando el conjunto de términos de mayor grado, en x, en y y en xy, se tiene

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0,$$

condición que se había encontrado directamente. Para obtener las direcciones asintóticas, puede escribirse,

$$Am^2 + Bm + C = 0,$$

ecuación que tendrá:

dos raíces si se verifica $B^2 - 4AC > 0$, caso de la hipérbola
una raíz si se verifica $B^2 - 4AC = 0$, caso de la parábola
ninguna raíz si se verifica $B^2 - 4AC < 0$, caso de la elipse.

3.° *Sea la curva*

$$y = x\sqrt{\frac{4x-8}{9x-27}}$$

— Que puede escribirse en la forma

$$y^2(9x-27) - x^2(4x-8) = 0$$

y al ordenar con relación a las potencias de xy

$$x(9y^2 - 4x^2) + (8x^2 - 27y^2) = 0,$$

lo que proporciona

$$x(9y^2 - 4x^2) = 0$$

$$x(3y + 2x)(3y - 2x) = 0$$

cuyas raíces son

$$x = 0 \qquad y = \frac{2}{3}x \qquad y = -\frac{2}{3}x.$$

Los valores de la ordenada dan así la pendiente de las dos asíntotas

$$m_1 = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{2}{3}.$$

66. Determinación de la ordenada en el origen. — Sea

$$y = mx + p$$

la ecuación de la asíntota. Hallemos p:

$$p = \lim (y - mx) \qquad (\text{para } x = \infty).$$

Se deduce

$$\frac{y}{x} = m + \frac{p}{x}.$$

La ecuación (1) puede expresarse entonces en la forma

$$\varphi_m\left(1, m + \frac{p}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \varphi_{m-1}\left(1, m + \frac{p}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \varphi_{m-2}\left(1, m + \frac{p}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Desarrollemos cada término en serie de TAYLOR (ver tomo II, §5), en donde consideramos toda esta expresión como *función de m*, siendo h

el incremento dado a m, que es igual a $\frac{p}{x}$. *Derivando con relación a* m, la expresión del primer término será:

$$\varphi_m(1, m) + \frac{p}{x} \cdot \varphi'_m(1, m) + \frac{1}{2!} \frac{p^2}{x^2} \cdot \varphi''_m(1, m) \ldots$$

que es nulo [ver la ecuación (2)].

La expresión del segundo término es:

$$\frac{1}{x}\left[\varphi_{m-1}(1, m) + \frac{p}{x} \cdot \varphi'_{m-1}(1, m) + \frac{1}{2!} \frac{p^2}{x^2} \cdot \varphi''_{m-1}(1, m) + \ldots\right] = 0, \text{ etc}$$

Multipliquemos todos los términos por x y saquemos $\frac{1}{x}$ como factor común, obteniéndose

$$p \cdot \varphi'_m(1, m) + \varphi_{m-1}(1, m) + \frac{1}{x}\left[\frac{p^2}{2!}\varphi''_m(1, m) + \ldots\right] = 0,$$

y, cuando x tiende a infinito

$$p \cdot \varphi'_m(1, m) + \varphi_{m-1}(1, m) = 0$$

de donde

$$\boxed{p = -\frac{\varphi_{m-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)}} \qquad (4)$$

Si se encuentra $p = \infty$, es que la asíntota se encuentra en el infinito, y se tiene una rama parabólica.

Ejemplos.

1.° *Consideremos la curva del tercer ejemplo estudiada anteriormente, que tenía dos asíntotas, de pendientes*

$$m_1 = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{2}{3}.$$

—La curva es

$$x(9y^2 - 4x^2) + (8x^2 - 27y^2) = 0$$

o bien

$$(9m^2 - 4) + (8 - 27m^2) = 0,$$

siendo el primer término $\varphi_m(1, m)$ y el segundo $\varphi_{m-1}(1, m)$.

Aplicando la fórmula (4) se tendrá:

$$p = -\frac{8 - 27m^2}{18m}$$

lo que da

$$\text{para} \quad m_1 = \frac{2}{3}, \qquad p = -\frac{8-12}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{para} \quad m_2 = -\frac{2}{3}, \qquad p = -\frac{8-12}{-12} = -\frac{1}{3}.$$

Las ecuaciones de las dos asíntotas oblicuas son, por tanto,

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad y = \frac{2}{3} - x - \frac{1}{3}.$$

Para hallar la abscisa de la asíntota paralela a Oy, hallemos y anulemos el coeficiente de la potencia más elevada de y; la ecuación ordenada con relación a y es:

$$y^2(9x - 27) - x^2(4x - 8) = 0.$$

que da

$$9x - 27 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = +3.$$

2.° *Sea la curva*

$$2y^2 + x^2 - 3xy + 4y - 3x + 1 = 0.$$

— Anulemos los términos de grado más elevado

$$2y^2 + x^2 - 3xy = 0$$

o

$$2m^2 - 3m + 1 = 0$$

cuyas raíces son 1 y 1/2, que son las pendientes de las dos asíntotas.

La ecuación puede escribirse

$$(2y^2 + x^2 - 3xy) + (4y - 3x) + 1 = 0.$$

El primer término es

$$\varphi_m(1, m) = 2m^2 - 3m + 1$$

y el segundo es

$$\varphi_{m-1}(1, m) = 4m - 3.$$

La ordenada en el origen será

$$p = -\frac{\varphi_{m-1}}{\varphi'_m} = -\frac{4m-3}{4m-3} = -1,$$

y las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = x - 1 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2}x - 1.$$

Nota. — Más adelante veremos otros ejemplos en el estudio y trazado de las curvas $f(x, y) = 0$ (ver capítulo XIV).

CAPITULO VII

ESTUDIO DE LAS CONICAS

67. Resolución y trazado de curvas. — La ecuación general de una cónica se presenta bajo la forma implícita siguiente:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \qquad (1)$$

que se llama ecuación completa de segundo grado.

— Vamos a ver que según sean los valores y los signos de los coeficientes A, B, C, D, E y F, la ecuación representa un círculo, una elipse, hipérbola o parábola. A veces, por excepción una o dos rectas.

— Se les llama *cónicas,* porque esas curvas se obtienen al considerar dos conos opuestos por el vértice y cortados por un plano (fig. 59):

si el plano es perpendicular al eje de los conos, se tiene una circunferencia o un punto;

si el plano es oblicuo, se tiene una elipse;

si el plano es paralelo al eje de los conos se tienen dos ramas de hipérbola;

si el plano es paralelo a la generatriz de los conos, se tiene una parábola;

si el plano es tangente a la generatriz de los conos, se tiene una recta;

por último, si el plano pasa por el vértice S, puede cortar al cono siguiendo dos rectas que se cortan en el vértice.

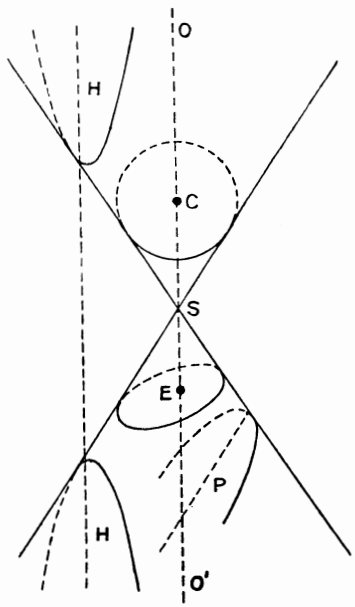

FIG. 59

— Eliminemos desde ahora el caso del círculo: para obtener un círculo hemos visto anteriormente lo que debía ocurrir

$$B = 0 \quad y \quad A = C.$$

Consideremos ahora la ecuación (1) como de segundo grado en y, y ordenémosla:

$$Ay^2 + y(Bx + D) + (Cx^2 + Ex + F) = 0.$$

Podemos deducir y como función de x, es decir

$$y = \frac{(Bx + D) \pm \sqrt{(Bx + D)^2 - 4A(Cx^2 + Ex + F)}}{2A}$$

$$= -\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + (2BD - 4AE)x + (D^2 - 4AF)}.$$

Para simplificar la escritura, hagamos

$$-\frac{B}{2A} = a \qquad -\frac{D}{2A} = b$$

$$B^2 - 4AC = n \qquad 2BD - 4AE = p \qquad D^2 - 4AF = r,$$

la ecuación se transforma en

$$\boxed{y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + px + r}} \qquad (2)$$

Bajo el radical aparece un trinomio que *deberá* ser positivo, *pues de lo contrario la curva sería imaginaria.*

68. Discusión. — Comencemos dibujando la recta $ax + b$. Para construir la curva, bastará ir sumando o restando a cada ordenada la cantidad variable

$$\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + px + r}.$$

Se observa (fig. 60) así, que la recta $ax + b$ dividirá a todas las cuerdas en dos partes iguales, tales como MM′, paralelas al eje de las y, y por eso se dice que esta recta es un *diámetro.*

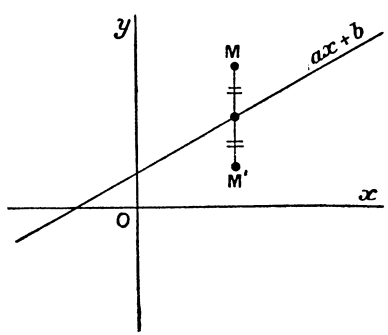

FIG. 60

— Vamos a estudiar ahora para qué valores de x el trinomio bajo el radical es positivo: se

sabe que todo depende del signo del coeficiente de x^2, es decir de n, o sea de $n = B^2 - 4AC$.

Existirán tres casos, según que

$$B^2 - 4AC2 \gtrless 0.$$

69. Primer caso: $B^2 - 4AC < 0$. — El trinomio bajo el radical pasa en ese caso por un máximo. Estudiemos si la ecuación

$$nx^2 + px + r = 0 \qquad (n < 0)$$

tiene o no raíces.

1.° *Existen dos raíces reales* x' y x'': el trinomio puede escribirse

$$n(x - x')(x - x''),$$

siendo positivo entre las raíces (fig. 59).

Llevemos sobre el eje de las x los valores extremos x' y x''. La curva estará comprendida entre las dos verticales trazadas por x' y

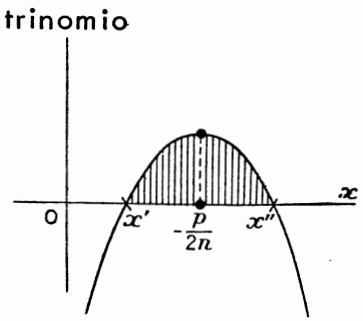

FIG. 61

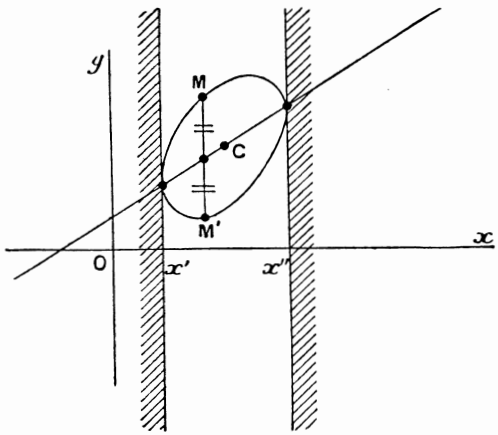

FIG. 62

x'', y basta sumar y restar a las ordenadas de la recta $ax + b$ una cantidad proporcional a la raíz cuadrada del trinomio, es decir proporcional a la raíz cuadrada de las ordenadas positivas rayadas en la figura 61, que parten de cero, y así obtenemos la figura 62.

Para $x = -\dfrac{p}{2n}$, que corresponde al máximo de la ordenada del trinomio, se obtendrá el centro C de la cónica, en donde la curva está más hinchada.

— Se obtiene así una curva cerrada que tiene la forma de una

elipse, y veremos más adelante que al desplazar el origen O a C y haciendo girar los ejes un ángulo conveniente, la ecuación de la cónica es

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$

que es la ecuación de la elipse.

2.° *No existe más que una raíz real*: el trinomio es siempre negativo, salvo para ese valor de x en que se anula, y la cónica se reduce entonces a un punto (x' y x'' tienden uno hacia otro).

3.° *Las raíces son imaginarias*: el trinomio es siempre negativo y la cónica es imaginaria (atención: no se reduce a la recta $ax + b$).

Nota. — Para trazar la elipse con exactitud, conviene saber si corta a los ejes y en qué puntos. Basta hacer $x = 0$ y deducir y, después $y = 0$ y sacar el valor de x.

Ejemplos. — *Sea la cónica*

$$y^2 - 4xy + 5x^2 - 6y + 7x + 15 = 0.$$

— Se tiene

$$B^2 - 4AC = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0,$$

lo que da la categoría *elipse*.

Puede escribirse, ordenando con relación a y,

$$y^2 - y(4x + 6) + (5x^2 + 7x + 15) = 0,$$

de donde se deduce

$$y = \frac{(4x + 6) \pm \sqrt{(4x + 6)^2 - 4(5x^2 + 7x + 15)}}{2}$$

$$= 2x + 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4x^2 + 20x - 24}$$

$$= 2x + 3 \pm \sqrt{-x^2 + 5x - 6}.$$

El trinomio bajo el radical, que pasa por un máximo, tiene por raíces + 2 y + 3, es positivo entre las raíces y su máximo se alcanza para $x = 2{,}5$.

Veamos si la elipse corta a los ejes:

para $x = 0$, resulta $y^2 - 6y + 15 = 0$, ecuación que carece de raíces,

para $y = 0$, resulta $5x^2 + 7x + 15 = 0$, que no tiene raíces reales, y, por tanto, la elipse no corta a los ejes.

Tracemos la recta $ax + b = 2x + 3$ (fig. 63), y, a cada una de sus ordenadas, entre $x = 2$ y $x = 3$, sumemos y restemos la raíz cuadrada del trinomio radicando. Así obtenemos la elipse, cuyo centro tiene por abscisa $x = 2{,}5$ y cuyos extremos son S_1 y S_2. Para hallar las ordenadas de los puntos S_1 y S_2, basta sustituir en la ecuación de la recta $2x + 3$ las abscisas $x = 2$ y $x = 3$, obteniendo

$$y_1 = 2 \cdot 2 + 3 = +7$$
$$y_2 = 2 \cdot 3 + 3 = +9.$$

— Más adelante veremos un método directo para determinar las coordenadas del centro C (pág. 150).

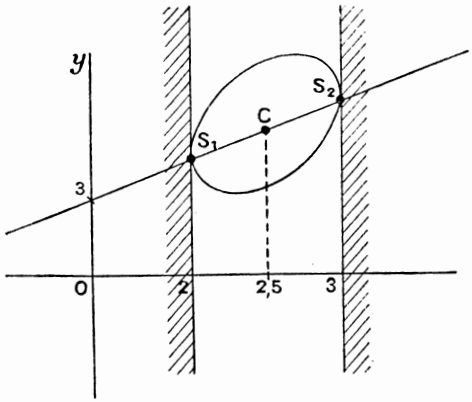

FIG. 63

70. Segundo caso: $B^2 - 4AC > 0$. — El trinomio bajo el radical pasa por un mínimo, pudiendo ocurrir tres casos según que la ecuación

$$nx^2 + px + r = 0$$

tenga o no raíces.

1.° *Existen dos raíces reales x' y x''*: el trinomio puede escribirse

$$n(x - x')(x - x''),$$

que es positivo en el espacio exterior a las raíces (fig. 64).

Llevemos sobre el eje de las x los dos valores, entre los cuales existe curva. Basta sumar y restar a las ordenadas de la recta $ax + b$ una cantidad proporcional a la raíz cuadrada del trinomio $nx^2 + px + r$, es decir proporcional a las ordenadas rayadas de la figura 64, ordenadas que parten de cero y que crecen hasta infinito. Así, se obtiene la curva de la figura 65, que tiene la forma de una hipérbola. Más

adelante veremos que trasladando el origen O a un punto conveniente, y girando los ejes un ángulo conveniente también, la ecuación se transforma en

$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola.

Una hipérbola tiene dos asíntotas, cuyo conocimiento facilita el trazado de ella; más adelante veremos cómo hallar las ecuaciones de sus asíntotas.

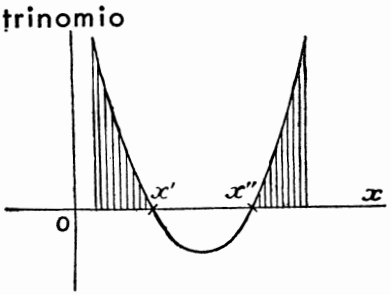

FIG. 64

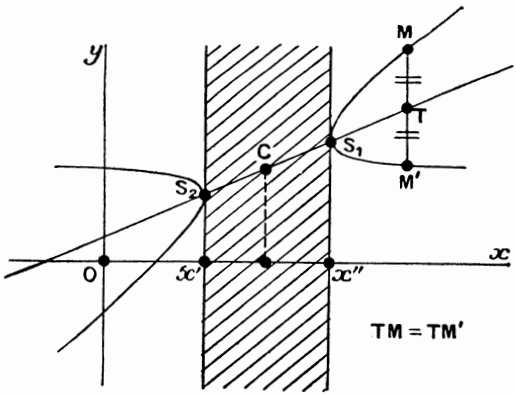

FIG. 65

Por otra parte, es evidente que la abscisa del centro de la hipérbola se encuentra en la mitad del segmento $x'x''$, es decir

$$x = -\frac{p}{2n}$$

siendo los extremos de la curva S_1 y S_2..

Los puntos en que corta a los ejes se obtendrán haciendo $x = 0$ e $y = 0$ sucesivamente, que ayudarán al trazado de la curva.

2.° *No existe más que una raíz* $x' = -\dfrac{p}{2n}$.

El trinomio puede expresarse en la forma $n(x - x')^2$, e y puede escribirse

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{n(x - x')^2} = ax + b \pm (x - x')\frac{\sqrt{n}}{2A},$$

expresión que representa dos rectas no paralelas

$$\left|\begin{array}{l} y = x\left(a + \dfrac{\sqrt{n}}{2A}\right) + \left(b - x'\dfrac{\sqrt{n}}{2A}\right) \\ y = x\left(a - \dfrac{\sqrt{n}}{2A}\right) + \left(b + x'\dfrac{\sqrt{n}}{2A}\right), \end{array}\right.$$

que se cortan en un punto sobre el diámetro, pues al hacer $x = x'$, los dos valores de y son iguales a

$$y = ax + b.$$

3.° *No existen raíces reales*: El trinomio bajo el radical es siempre positivo cualquiera que sea x, y su curva tiene la forma general de la figura 66, con un mínimo positivo para $x' = \dfrac{p}{2n}$. La cónica no corta al diámetro.

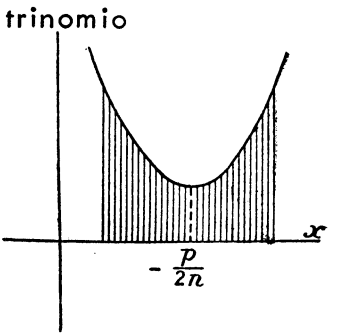

FIG. 66

— Situemos la abscisa $-\dfrac{p}{2n}$ que nos da el punto C en la figura 67. El valor más pequeño de y corresponde a x'; a continuación es necesario sumar y restar a las ordenadas de la recta $ax + b$ una cantidad proporcional a la raíz cuadrada de las ordenadas del trinomio, es decir las ordenadas positivas rayadas de

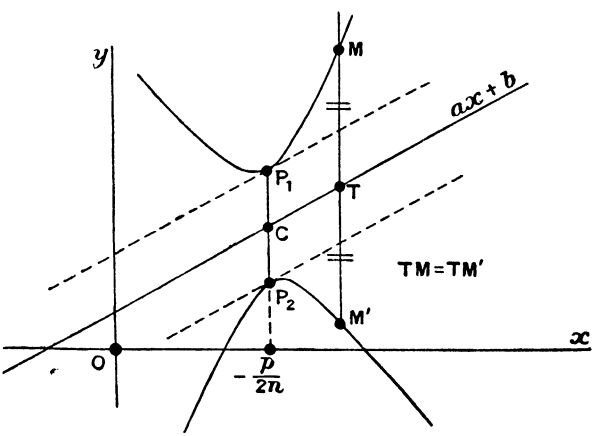

FIG. 67

la figura 66: la curva se dibujará por encima y por debajo de las rectas paralelas a la $ax + b$ y pasando por los puntos P_1 y P_2, lo que da la figura 67 que tiene la forma de una hipérbola. Más adelante veremos que trasladando el origen O a C, y haciendo girar los ejes un ángulo conveniente, se obtiene la ecuación de una *hipérbola*

$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1.$$

Ejemplo. — 1.° *Consideremos la cónica*

$$y^2 - 4xy + 3x^2 + 2y + x - 5 = 0.$$

— Se tiene

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

de donde

$$B^2 - 4AC = 16 - 4 \cdot 3 > 0,$$

y por tanto, la cónica es de la categoría *hipérbola.*

Ordenando la ecuación con relación a y:

$$y^2 + y(2 - 4x) + (3x^2 + x - 5) = 0$$

de donde

$$y = \frac{-(2 - 4x) \pm \sqrt{(2 - 4x)^2 - 4(3x^2 + x - 5)}}{2} = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

El trinomio bajo el radical pasa por un mínimo y se anula para $x' = 2$ y $x'' = 3$, siendo su curva representativa la de la figura 68, que es positiva en el exterior de las raíces.

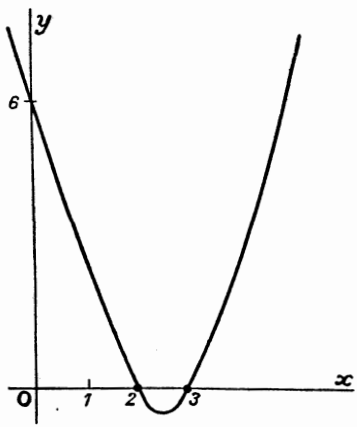

FIG. 68

En la figura 69 tracemos la recta $2x - 1$, así como las abscisas 2 y 3. No existe función entre estos dos valores y los dos etxremos de la cónica, son S_1 y S_2.

Hallemos los puntos en que la curva corta a los ejes:

para

$x = 0$, se obtiene $y^2 + 2y - 5 = 0$

y de aquí

$$y = 1{,}45 \quad \text{e} \quad y = -3{,}45$$

para

$y = 0$, se tiene $3x^2 + x - 5 = 0$

de donde

$$x \simeq -\frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad x \simeq +\frac{7}{6}$$

Así obtenemos las dos ramas de la hipérbola indicada, sin ocuparnos aquí de la determinación de las dos asíntotas. Es evidente que la determinación de las ecuaciones de las asíntotas y el trazado de ellas facilitarán el dibujo exacto de la hipérbola; más adelante estudiaremos esto con detalle.

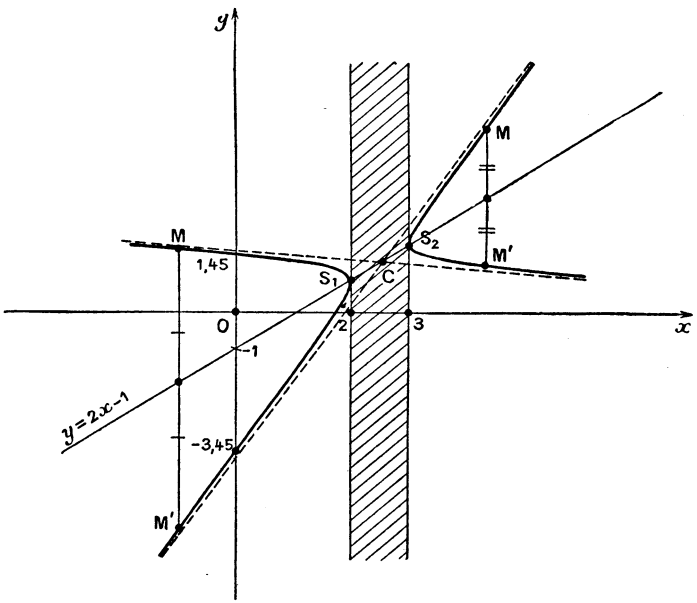

FIG. 69

2.° *Sea la cónica*

$$y^2 - 6xy + 8x^2 - 8y + 28x + 12 = 0.$$

— Se tiene

$$B^2 - 4AC = 36 - 4 \cdot 8 > 0,$$

y la cónica es de la categoría de *hipérbola.*

Ordenando la ecuación

$$y^2 - y(6x + 8) + (8x^2 + 28x + 12) = 0,$$

y de aquí

$$y = \frac{6x + 8 \pm \sqrt{(6x + 8)^2 - 4(8x^2 + 28x + 12)}}{2}$$

$$= 3x + 4 \pm \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x + 4 \pm \sqrt{(x - 2)^2} = 3x + 4 \pm (x - 2).$$

La cónica se reduce a dos rectas

$$\left| \begin{array}{l} y = 4x + 2 \\ y = 2x + 6. \end{array} \right.$$

71. Tercer caso: $B^2 - 4AC = 0$. — Resulta

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{px + r.}$$

Despreciemos el caso en que $px + r < 0$: ya que la cónica es *imaginaria*.

Existen varios casos cuando $px + r > 0$:

1.° *p positivo*. Se tiene

$$px > -r \quad \text{y} \quad x > -\frac{r}{p},$$

valor que puede ser positivo o negativo, dependiendo todo de los signos de r y de p.

— Dibujemos el valor crítico $-\frac{r}{p}$ (fig. 70). Sumando y restando

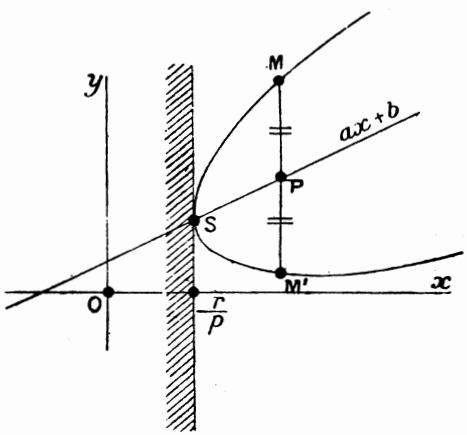

FIG. 70

a cada una de las ordenadas de la recta $ax + b$ una cantidad $\frac{1}{2A}\sqrt{px + r}$ que parte de cero y que aumenta indefinidamente, se obtiene la curva de la figura 70, cuya forma es la de una parábola.

Más adelante veremos que al desplazar el origen O y girar los ejes un ángulo conveniente, la ecuación de la curva es de la forma

$$y^2 = Kx$$

que es una *parábola.*

2.° *p negativo.* Se tendrá

$$px + r > 0 \qquad \text{o} \qquad x < \frac{-r}{2A},$$

valor que puede ser negativo o positivo. La marcha a seguir es la misma que en el caso anterior, y se tendrá una parábola girada hacia la izquierda (fig. 71).

En ambos casos, se precisa la posición de la parábola al buscar los puntos en que ella corta a los ejes, al hacer

$x = 0$, de donde se deduce y,
$y = 0$, de donde se deduce x.

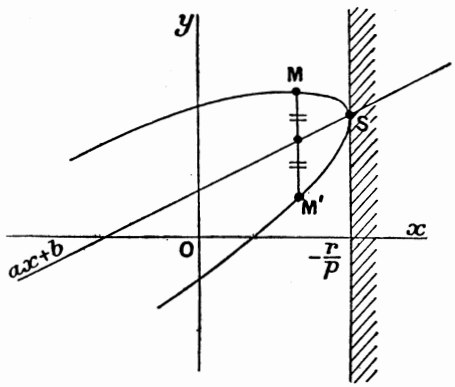

FIG. 71

3.° $p = 0$. En este caso se tiene

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{r}.$$

Tres casos pueden ocurrir:

$r > 0$. Se sumarán y restarán a cada ordenada de la recta $ax + b$ una cantidad constante: así se obtendrán *dos rectas paralelas.*

$r < 0$. La cantidad es imaginaria.

$r = 0$. Queda $y = ax + b$, y la cónica se reduce a una recta.

Nota I. — En el estudio anterior se ha supuesto $A \neq 0$.

Si $A = 0$, se obtiene una ecuación de primer grado en y, que da

$$y = -\frac{Cx^2 + Dx + F}{Bx + D};$$

si $B = 0$, se obtiene un polinomio de segundo grado en x, y la curva es una parábola;

si $B \neq 0$, y se efectúa la división de esta fracción racional se obtiene

$$y = ax + b + \frac{R}{Bx + D},$$

basta añadir a las ordenadas de la recta $ax + b$ una cantidad

que tiende a cero, *si* $x \to \infty$,

que tiende a ∞, si $\to -\frac{D}{B}$,

de aquí se deduce que la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, y que la recta

$$x = -\frac{D}{B}$$

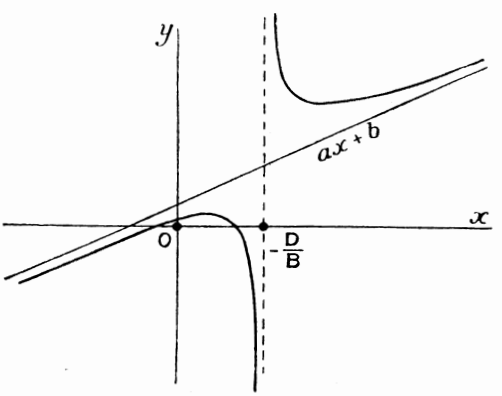

FIG. 72

es una asíntota vertical. Se obtiene la curva de la figura 72, que es una hipérbola. Por otra parte, ya que $A = 0$ y $B \neq 0$, se tiene

$$B^2 - 4AC > 0,$$

y la curva es del tipo *hipérbola*.

Nota II. — En el caso de una parábola, es fácil ver que los tres términos de segundo grado de la cónica $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ forman un cuadrado perfecto.

— En efecto, ya que $B^2 - 4AC = 0$, puede escribirse

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = Ay^2 \pm \sqrt{4AC}xy + Cx^2 = (y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C})^2.$$

Ejemplo. — *Sea la cónica*

$$y^2 - 6xy + 9x^2 + 3x = 0$$

— Se tiene $B^2 - 4AC = 36 - 4 \cdot 9 = 0$, que es una parábola. Se deduce

$$y = \frac{6x \pm \sqrt{36x^2 - 4(9x^2 + 3x)}}{2} = 3x \pm \sqrt{-3x},$$

y entonces es necesario que

$$-3x > 0 \quad \text{de donde} \quad x < 0.$$

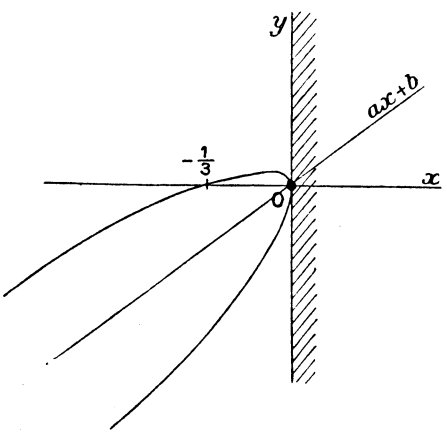

FIG. 73

Hallemos los puntos en que corta la parábola a los ejes:

para $x = 0$, resulta $y^2 = 0$ e $y = 0$,

para $y = 0$, resulta $9x^2 + 3x = 0$,

$$3x(3x + 1) = 0 \quad \text{de donde} \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Así se obtiene la curva de la figura 73.

Obsérvese que los tres términos de segundo grado forman un cuadrado perfecto

$$y^2 - 6xy + 9x^2 = (y - 3x)^2.$$

72. Asíntotas de las cónicas. — Unicamente la hipérbola tiene dos asíntotas, y la parábola ninguna, como veremos.

— De acuerdo con la teoría general de las asíntotas, estudiada anteriormente, expresemos la ecuación de la asíntota en la forma

$$y = mx + q.$$

Se tiene

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = \lim \frac{ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + px + r}}{x}$$

$$= a + \frac{b}{x} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{n + \frac{p}{x} + \frac{r}{x^2}} \qquad (\text{con } n > 0)$$

y, si $x \to \infty$, resulta

$$m = a \pm \frac{1}{2A}\sqrt{n},$$

existen entonces dos asíntotas, ya que hay dos pendientes

$$m_1 = a + \frac{\sqrt{n}}{2A} \quad \text{y} \quad m_2 = a - \frac{\sqrt{n}}{2A}.$$

— Calculemos el valor de q:

$$q = \lim (y - mx)_{x=\infty} = \lim \left[\left(ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + px + r} \right) - \left(a \pm \frac{1}{2A}\sqrt{n} \right) x \right]$$

el término en ax desaparece y si se saca $\pm \frac{1}{2A}$ factor común, se obtiene

$$q = \lim \left[b \pm \frac{1}{2A} (\sqrt{nx^2 + px + r} - \sqrt{nx^2}) \right]_{x=\infty} = \infty - \infty.$$

Para hacer desaparecer la indeterminación, multipliquemos y dividamos por

$$(\sqrt{nx^2 + px + r} + \sqrt{nx^2}):$$

$$q = \lim \left[b \pm \frac{1}{2A} \frac{(\sqrt{nx^2+px+r} - \sqrt{nx^2})(\sqrt{nx^2+px+r} - \sqrt{nx^2})}{\sqrt{nx^2+px+r} + \sqrt{nx^2}} \right]$$

$$= \lim \left[b \pm \frac{1}{2A} \cdot \frac{px + r}{\sqrt{nx^2+px+r} + \sqrt{nx^2}} \right] = \frac{\infty}{\infty}.$$

Dividiendo numerador y denominador por x:

$$q = \lim \left[b \pm \frac{1}{2A} \cdot \frac{p + \frac{r}{x}}{\sqrt{n + \frac{p}{x} + \frac{r}{x^2}} + \sqrt{n}} \right]$$

y si $x \to \infty$, resulta

$$q = b \pm \frac{1}{2A} \cdot \frac{p}{2\sqrt{n}} = b \pm \frac{p}{4A\sqrt{n}}.$$

Las ecuaciones de las dos asíntotas, *considerando primero el signo* + *para* m *y para* q, *y después el signo* —, son:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \left(a + \frac{\sqrt{n}}{2A}\right) x + \left(b + \frac{p}{4A\sqrt{n}}\right) \\ y &= \left(a - \frac{\sqrt{n}}{2A}\right) x + \left(b - \frac{p}{4A\sqrt{n}}\right) \end{aligned}}$$

En cada caso particular, será necesario realizar todos los cálculos.

Nota. — Hallemos el punto de intersección de las dos asíntotas igualando los dos valores de y

$$\left(a + \frac{\sqrt{n}}{2A}\right) x + \left(b + \frac{p}{4A\sqrt{n}}\right) = \left(a - \frac{\sqrt{n}}{2A}\right) x + \left(b - \frac{p}{4A\sqrt{n}}\right)$$

que se reduce a:

$$\frac{\sqrt{n}}{A} x + \frac{p}{2A\sqrt{n}} = 0$$

y de aquí

$$2nx + p = 0$$

$$x = \frac{p}{2n},$$

entonces, $-\frac{p}{2n}$ es la abscisa que corresponde al mínimo del trinomio $nx^2 + px + r$, es decir (puesto que existen dos raíces) a la mitad

del intervalo x' y x'', y ese punto se encuentra en el diámetro $ax + b$, *o sea que C es el centro de la hipérbola.*

En efecto, si se sustituye este valor de x en cualquiera de las ecuaciones de las asíntotas, se obtiene:

$$y = -\frac{pa}{2n} + b$$

que es igual a la ordenada del diámetro $ax + b$ para este vlaor de x.

Ejemplo. — Consideremos la ecuación de la hipérbola estudiada anteriormente,

$$y^2 - 4xy + 3x^2 + 2y + x - 5 = 0.$$

— Se ha hallado

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

Busquemos la asíntota $y = mx + q$. Se tiene

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = \lim \left(2 - \frac{1}{x} \pm \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}\right) = 2 \pm 1$$

de donde

$$m_1 = 3 \qquad \text{y} \qquad m_2 = 1.$$

Inmediatamente se tendrá

$$q = \lim (y - mx)_{x=\infty} = \lim [(2x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}) - (2 \pm 1)\, x]$$

y al simplificar el término en $2x$, *y sacar el signo doble como factor:*

$$q = \lim [-1 \pm (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2})]$$

$$= \lim \left[-1 \pm \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2}}\right]$$

$$= \lim \left[-1 \pm \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2}}\right] = \frac{\infty}{\infty}.$$

Dividiendo numerador y denominador por x:

$$q = \lim \left[-1 \pm \frac{-5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + \sqrt{1}}\right]_{x=\infty} = -1 \pm \frac{5}{2},$$

o sea

$$\left| \begin{array}{l} q_1 = -1 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{7}{2} \\ q_2 = -1 + \dfrac{5}{2} = +\dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$$

Por tanto, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = mx + q = (2 \pm 1)\, x + \left(-1 \mp \frac{5}{2}\right)$$

es decir

$$\left| \begin{array}{l} y = 3x - \dfrac{7}{2} \\ y = x + \dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$$

La ordenada del centro C corresponde a $x = \dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{5}{2}$, y su valor viene dado por

$$y = ax + b = 2x - 1 = 2 \cdot \frac{5}{2} - 1 = 4 + 4.$$

73. Caso de una hipérbola equilátera. — Se llama hipérbola equilátera una hipérbola cuyas asíntotas son perpendiculares.

— Intentemos, partiendo de la hipérbola

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

en donde $B^2 - 4AC > 0$, ver si es equilátera. Esto es posible, ya que si se escriben las dos asíntotas en la forma usual

$$y = m_1 x + q_1 \qquad \text{e} \qquad y = m_2 x + q_2$$

es necesario que se verifique

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Consideremos las ecuaciones de las dos asíntotas, que hemos obtenido en el párrafo 72, cuyas pendientes son

$$m_1 = a + \frac{\sqrt{n}}{2A} \qquad \text{y} \qquad m_2 = a - \frac{\sqrt{n}}{2A}.$$

Debe tenerse

$$\left(a + \frac{\sqrt{n}}{2A}\right)\left(a - \frac{\sqrt{n}}{2A}\right) = -1$$

$$a^2 - \frac{n}{4A^2} = -1.$$

Sustituyamos a y n por sus valores (ver el principio del estudio de cónicas):

$$a = -\frac{B}{2A} \qquad \text{y} \qquad n = B^2 - 4AC,$$

lo que da

$$\left(-\frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right) = -1$$

o bien

$$\frac{4AC}{4A^2} = -1$$

y

$$C = -A.$$

En resumen, la hipérbola es equilátera si $A = -C$, es decir si en la ecuación general de la cónica *el coeficiente de* y^2 es igual al de x^2, pero cambiado de signo.

— Por otra parte, si A y C tienen signos contrarios se puede asegurar que es una hipérbola, ya que $B^2 - 4AC$ será siempre positivo.

— La expresión

$$4y^2 - 3xy - 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

representa una hipérbola equilátera.

74. Hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. — Puesto que las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son las bisectrices de los ejes, se tiene $a = b$ y la ecuación será

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

— Tomemos entonces las dos asíntotas como nuevos ejes, y hagamos girar los antiguos 45°, se tendrá

$$x = X\cos\alpha - Y\,\text{sen}\,\alpha = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$

$$y = X\,\text{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y),$$

y la ecuación será

$$\frac{1}{2}(X - Y)^2 - \frac{1}{2}(X + Y)^2 = a^2$$

o bien

$$-2XY = a^2$$

$$XY = -K^2.$$

Se obtendría la ecuación

$$\boxed{XY = +K^2}$$

si se hubiera tomado la hipérbola $x^2 - y^2 = -a^2$.

Más adelante demostraremos que la ecuación de una hipérbola no equilátera referida a sus asíntotas, puede expresarse también en la forma $XY = K^2$.

75. Caso particular de determinación de asíntotas.

1.° La ecuación $y = \frac{1}{x}$ representa, como se sabe, *una hipérbola equilátera, es decir una hipérbola cuyas asíntotas son perpendiculares*. Comprobémoslo.

— La ecuación puede escribirse en la forma

$$xy - 1 = 0$$

que es una cónica de la forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Como $B^2 - 4AC = +1$, es una hipérbola.

Determinemos sus asíntotas. La primera se obtiene inmediatamente: $y = \infty$ para $x = 0$, luego el eje de las y es la asíntota vertical.

Sea $y = mx + q$ la ecuación de la otra asíntota. Se tiene

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = \lim \frac{1}{x^2} = 0 \qquad (1)$$

y $q = \lim (y - mx)_{x=\infty} = \lim y = 0,$

entonces, la segunda asíntota es paralela al eje de las x, y como $q = 0$, es el eje mismo de las x la asíntota.

2.° *Sea la hipérbola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hallemos sus asíntotas para precisar la significación del parámetro b.

— Se tiene

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

Sea $y = mx + q$ la ecuación de la asíntota.
Tendremos

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = \lim \left[\frac{\pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} \right] = \lim \left(\pm b \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} \right) = \pm \frac{b}{a},$$

y

$$q = \lim (y - mx) = \lim \left[\pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \left(\pm \frac{b}{a} \right) x \right]$$

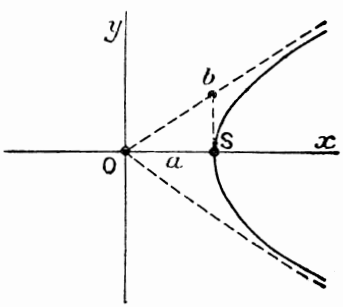

FIG. 74

$$= \lim \left[\pm \left(b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - b \frac{x}{a} \right] \right] = \infty - \infty$$

$$= \lim \left[\pm \frac{b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) - b^2 \frac{x^2}{a^2}}{b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + b \frac{x}{a}} \right]_{x=\infty} = 0,$$

las dos asíntotas tienen entonces por ecuaciones

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a} x,$$

y si se hace $x = a$, resulta para la primera

$$y = b,$$

entonces, b es la ordenada de la asíntota para $x = a$, es decir en el vértice de la hipérbola (fig. 74).

Nota. — Teniendo presente los estudios anteriores, invitamos al lector a verificar las tres proporciones siguientes:

1.° Si en la ecuación de una hipérbola cualquiera, falta el término en x^2, una de la asíntotas es paralela al eje de las x.

2.° Si es el término que falta el y^2, una de las asíntotas es paralela al eje de las y.

3.° Si los términos en x^2 y en y^2 faltan, las dos asíntotas son paralelas a los dos ejes.

76. Ecuación general de una hipérbola referida a sus asíntotas. — Acabamos de ver la ecuación de una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas, pero se puede generalizar esta ecuación para una hipérbola cualquiera, no equilátera.

— Sea la hipérbola de centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

o bien $$(bx + ay)(bx - ay) = a^2b^2.$$

Tracemos (fig. 75) las dos rectas D_1 y D_2 dadas por la ecuación

$$\left|\begin{array}{l} bx + ay = 0 \quad \text{o} \quad y = -\dfrac{b}{a}x, \\ bx - ay = 0 \quad \text{o} \quad y = +\dfrac{b}{a}x. \end{array}\right. \qquad (1)$$

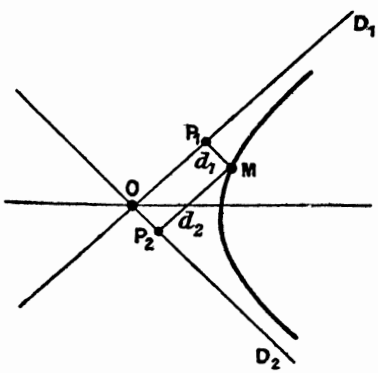

FIG. 75

Sea M un punto de la hipérbola y d_1 y d_2 las distancias de ese punto a las dos rectas. Se tiene

$$d_1 = \frac{|\,bx + ay\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_2 = \frac{|\,bx - ay\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

multipliquemos miembro a miembro

$$d_1 \cdot d_2 \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{c^2} = \text{constante.}$$

De las ecuaciones (1), se observa que las rectas D_1 y D_2 son las dos asíntotas de la hipérbola (si $d_1 \to 0$, $d_2 \to \infty$).

— Tomemos esas dos asíntotas por ejes y tendremos entonces coordenadas oblicuas. Tracemos las paralelas MA y MB a esas dos asíntotas desde M y así tendremos sus coordenadas:

$$MA = Y \quad y \quad MB = X.$$

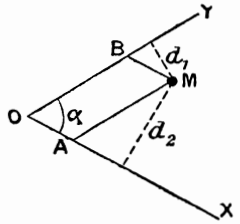

FIG. 76

Entonces se tiene (fig. 76):

$$d_1 = MB \operatorname{sen} \alpha = X \operatorname{sen} \alpha$$
$$d_2 = MA \operatorname{sen} \alpha = Y \operatorname{sen} \alpha.$$

de donde

$$d_1 d_2 = XY \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

y

$$XY = \frac{d_1 \cdot d_2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha} = \text{constante},$$

o bien

$$\boxed{XY = K^2}$$

que es la ecuación buscada.

Por otra parte, se puede hallar un valor sencillo de K^2: en efecto, en el vértice S (fig. 77), se tiene

$$X = Y = K.$$

Tracemos la recta ST, cuya longitud es igual a b. (Ver la ecuación de las asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ indicada anteriormente); y como

$$a^2 + b^2 = c^2$$

se tiene

$$OT = c.$$

Tracemos SR paralela a la recta D_2, y como el triángulo OSR es isósceles, SR, que es X, es igual a

$$\boxed{X \cdot Y = \frac{c^2}{4}}$$

que es la ecuación buscada.

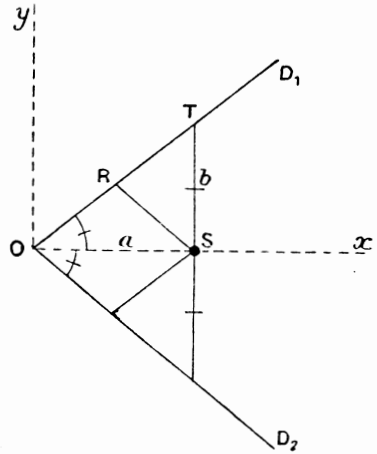

FIG. 77

77. Algunas aplicaciones de las hipérbolas equiláteras. — La ecuación $y = \frac{a}{x}$, que representa una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas (fig. 78), tiene un gran número de aplicaciones prácticas, cuando $x > 0$. Citemos algunos ejemplos:

1.° En el estudio de los gases perfectos, la ley de MARIOTTE que liga el volumen y la presión (a temperatura constante)

$$pv = \mathrm{K} \quad \text{o} \quad v = \frac{\mathrm{K}}{p}$$

viene representada por tal curva.

2.° En electricidad, consideremos una resistencia R variable, situada entre una diferencia de potencial constante V (por ejemplo una batería de acumuladores). La intensidad I de corriente viene dada por la ley de OHM

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}} = f(\mathrm{R})$$

o bien

$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{R} = \mathrm{V} = \text{constante},$$

y por tanto, la curva de $\mathrm{I} = f(\mathrm{R})$ sigue siendo una hipérbola equilátera.

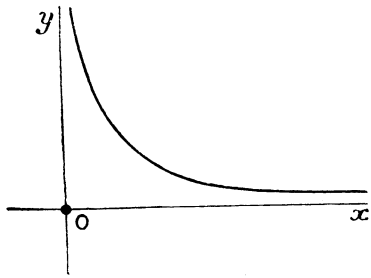

FIG. 78

3.° También en electricidad, la impedancia Z de un condensador en función de la frecuencia f viene dada por la expresión

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{\mathrm{C}\omega} = f(\omega) \qquad (\omega = 2\pi f)$$

o bien

$$\mathrm{Z} \cdot \omega = \frac{1}{\mathrm{C}} = \text{constante}$$

que es una hipérbola equilátera.

78. Ejercicio de mecánica. — A título de ejercicio, estudiemos el problema siguiente: Un punto móvil se desplaza con movimiento uniforme sobre una hipérbola equilátera. Hallar las componentes de la aceleración sobre las dos asíntotas.

— Sea $xy = K^2$ la ecuación de esta hipérbola, y v la velocidad constante del móvil a lo largo de la curva. Derivemos la ecuación de la hipérbola

$$y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = 0,$$

por otra parte, se tiene

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \qquad (1)$$

De esas dos ecuaciones, se deduce

$$\frac{dx}{dt} = v\frac{x^2}{\sqrt{K^4 + x^4}},$$

y

$$\frac{dy}{dt} = -v\frac{K^2}{\sqrt{K^4 + x^4}},$$

que al derivar la primera y simplificar se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2v\frac{K^4x}{(K^4 + x^4)^{3/2}}\frac{dx}{dt} = 2v^2\frac{K^4x^3}{(K^4 + x^4)^2}$$

Pero la ecuación de la hipérbola da

$$x^2y^2 = K^4,$$

lo que nos permite escribir, al sustituir en el denominador K^4 por x^2y^2, y hacer $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2v^2K^4}{xr^4}.$$

De la ecuación (1), al derivar, se deduce:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

y de aquí

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\dfrac{dy}{dt}}.$$

Sustituyendo y simplificando, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2v^2K^4 \frac{x^4}{y(K^4 + x^4)^2} = \frac{2v^2K^4}{r^4 y}. \tag{3}$$

Como se ha hecho $x^2 + y^2 = r^2$, las componentes de la aceleración sobre los dos ejes, que son también las dos asíntotas, son

1.° sobre el eje de las x: $\dfrac{2v^2K^4}{r^2x}$

2.° sobre el eje de las y: $\dfrac{2v^2K^4}{r^2x}$.

79. La parábola carece de asíntotas. — En efecto, consideremos la parábola

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{px + r}.$$

Expresemos la asíntota en la forma $y = mx + q$, y calculemos m y q. Se tiene

$$m = \lim \frac{y}{x} = \left(a + \frac{b}{x} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{p}{x} + \frac{r}{x^2}}\right)_{x=\infty} = a,$$

y

$$q = \lim (y - mx) = \lim \left(ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{px + r} - ax\right)$$

$$= \lim \left(b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{px + r}\right)_{x=\infty} = \infty,$$

Así, la asíntota se encuentra en el infinito, o dicho de otra manera, no existe.

— Hay que hacer notar que existen gran número de curvas cuyas ramas van al infinito, y que carecen de asíntotas.

Por ejemplo, la función

$$y^3 = x^2 + x\sqrt{x}$$

se hace infinita para $x = \infty$. ¿Tiene asíntota?

— Se tiene

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim \left(\frac{\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}{x}\right) = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}\right)_{x=\infty} = 1,$$

y

$$q = \lim\left[\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}} - x\right] = \infty - \infty$$

$$= \lim\left[\frac{(\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}} - x)(\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}} + x)}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}} + x}\right]$$

$$= \lim\left[\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}} + x}\right] = \lim\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}\right]$$

que, para $x = \infty$ da ∞. Por tanto no tiene asíntota.

80. Centro de una curva. — Se llama centro de una curva a un punto C tal que los puntos de ella se encuentran simétricamente colocados dos a dos respecto a ese punto.

Cuando el origen es el centro de una curva, las coordenadas de dos puntos simétricos M y M′ son iguales y de signos contrarios, e inversamente (fig. 79).

De la definición se deduce que si la ecuación de una curva no varía cuando se sustituye x por $-x$ e y por $-y$, el origen es un centro.

En particular, si la curva es algebraica, y si su ecuación no encierra más que términos de la misma paridad, el origen es un centro.

Existen curvas que tienen una infinidad de centros, por ejemplo las funciones periódicas sinusoidales. Así, la función $y = \operatorname{sen} x$ tiene una infinidad de centros para

$$x = 0,\ \pi,\ 2\pi \ldots K\pi.$$

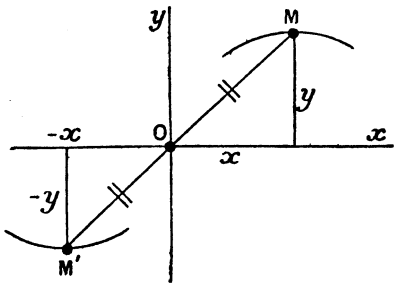

FIG. 79

Aplicación a las cónicas. Tomemos un punto cualquiera M(x, y) de la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

y supongamos que el origen de esta cónica sea al mismo tiempo el centro (fig. 79). Tracemos la cuerda MM′, en donde M′ es el simétrico de M; siendo x e y las coordenadas de M y $-x$ y $-y$ las de M′; se deberá verificar

$$A(-y)^2 + B(-x)(-y) + C(-x)^2 + D(-y) + E(-x) + F = 0$$

o bien

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 - Dy - Ex + F = 0.$$

Restando esta ecuación de la primera, resulta

$$2Dy + 2Ex = 0,$$

entonces, cumpliéndose esta expresión, cualquiera que sean x e y, exige que se verifique simultáneamente

$$D = 0 \qquad y \qquad E = 0,$$

quedando para la ecuación de la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0,$$

y de aquí podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema. — *Cuando una cónica tiene su centro en el origen, la ecuación de la misma carece de términos de primer grado.*

81. Cálculo de las coordenadas del centro. — Sea la cónica

$$Ay^2 + Bx + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \qquad (1)$$

y x_0 e y_0 las coordenadas (por ahora desconocidas) del centro. Traslademos el origen a ese punto mediante las fórmulas establecidas en el párrafo 15, manteniendo los ejes paralelos, y llamemos X e Y a las nuevas coordenadas.

$$x = x_0 + X \qquad e \qquad y = y_0 + Y.$$

La ecuación de la cónica se transforma en

$$A(y_0 + Y)^2 + B(x_0 + X)(y_0 + Y) + C(x_0 + X)^2 + D(y_0 + Y) + E(x_0 + X) + F = 0,$$

o bien

$$AY^2 + BXY + CX^2 + Y(2Ay_0 + Bx_0 + D) + X(By_0 + 2Cx_0 + E) + (Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2) + (Dy_0 + Ex_0 + F) = 0.$$

Para que el punto $x_0\, y_0$ sea un centro, es necesario que al sustituir X por $-X$, e Y por $-Y$, la ecuación no varíe, lo que tiene lugar cuando los términos de primer grado en X e Y no existen.

Anulemos entonces los coeficientes de X e Y:

$$2Ay_0 + Bx_0 + D = 0 \qquad (2)$$

$$By_0 + 2Cx_0 + E = 0, \qquad (3)$$

lo que nos proporciona dos ecuaciones con dos incógnitas x_0 e y_0; y resolviendo el sistema se deduce

$$y_0 = \frac{-BS + 2CD}{B^2 - 4AC} \quad \text{y} \quad x_0 = \frac{-BD + 2AE}{B^2 - 4AC}$$

lo que exige que $B^2 - 4AC \neq 0$. De lo anterior resulta que sólo la elipse e hipérbola tienen un centro, mientras que la parábola carece de él.

Si, en la expresión de x_0, se tiene $-BD + 2AE = 0$ y $B^2 - 4AC = 0$, se obtiene

$$x_0 = \frac{0}{0},$$

en este caso se vería que la ecuación (1) se reduce a dos rectas paralelas, y el lugar de los centros es la recta paralela a aquéllas y situada a igual distancia.

— *Pero el cálculo anterior nos conduce a una conclusión importante que permite hallar rápidamente las coordenadas del centro. En efecto, se observa que:*

la ecuación (2) es la derivada parcial, con relación a y, de la ecuación (1), sustituyendo y por y_0,

la ecuación (3) es la derivada parcial, con relación a x, de la ecuación (1), sustituyendo x por x_0,

de aquí el teorema:

Teorema. — *Las coordenadas x_0 e y_0 del centro se obtienen anulando las derivadas parciales de la ecuación de la cónica, sustituyendo a continuación x por x_0 e y por y_0:*

$$\boxed{f'_{y_0} = 0 \quad \text{y} \quad f'_{x_0} = 0}$$

— Calculemos esas coordenadas por las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{cases} 2Ay_0 + Bx_0 = -D \\ By_0 + 2Cx_0 = -E. \end{cases}$$

Y por determinantes deducimos rápidamente las coordenadas x_0 e y_0; pero obsérvese que el determinante del denominador de x_0 y de y_0 es

$$\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2,$$

que por consiguiente obliga a que $B^2 - 4AC \neq 0$.

De aquí se deduce la conclusión ya señalada anteriormente,

si $B^2 - 4AC \neq 0$ (elipse o hipérbola), *existe un centro*

si $B^2 - 4AC = 0$ (parábola), *no existen centros.*

En el caso de la parábola se dice frecuentemente que *el centro se encuentra en el infinito.*

Ejemplos.

1.° *Consideremos la elipse estudiada en el parágrafo 69:*

$$y^2 - 4xy + 5x^2 - 6y + 7x + 15 = 0.$$

— Se tiene

$$f'_{y_0} = \quad 2y_0 - \quad 4x_0 - 6 = 0$$
$$f'_{x_0} = -4y_0 + 10x_0 + 7 = 0,$$

y de aquí el sistema

$$\begin{vmatrix} y_0 - 2x_0 = 3 \\ 4y_0 - 10x_0 = 7, \end{vmatrix}$$

que da

$$x_0 = \frac{5}{2} \qquad y_0 = +8.$$

Se observa que x_0 es la abscisa que corresponde a la mitad del intervalo de las dos raíces x' y x'' del trinomio bajo el radical, y que aquí son $+2$ y $+3$.

82. Lugar geométrico de los centros de una cónica. — Supongamos que la ecuación de una cónica contiene un parámetro λ. Dando a ese parámetro diferentes valores numéricos, el centro de la cónica se desplaza; vamos a hallar la ecuación del lugar geométrico de ese centro.

Basta eliminar ese parámetro λ entre las dos ecuaciones

$$f'_x = 0 \qquad \text{y} \qquad f'_y = 0.$$

Ejemplo. — Hallar el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas representadas por

$$-y^2 + 2\lambda xy + x^2 - 2y + 4\lambda x = 0.$$

— Se tiene

$$\left| \begin{array}{l} f'_x = \ 2\lambda y + 2x + 4\lambda = 0 \\ f'_y = -2y + 2\lambda x - 2 = 0, \end{array} \right.$$

o bien

$$\left| \begin{array}{l} \lambda y + x + 2\lambda = 0 \\ -y + \lambda x - 1 = 0. \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación se deduce:

$$\lambda = \frac{1 + y}{x},$$

y, sustituyendo este valor en la primera,

$$\left(\frac{1 + y}{x}\right) y + x + 2\left(\frac{1 + y}{x}\right) = 0$$

o bien

$$x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0,$$

que es la ecuación de una circunferencia, cuyo centro está situado sobre el eje de las y y cuya ordenada es $-\frac{3}{2}$.

CAPITULO VIII

REDUCCION DE LA ECUACION GENERAL DE LAS CONICAS

83. Principio. — El objeto de la *reducción* de la ecuación general de una cónica.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \qquad (1)$$

es la de trasladar el origen O al centro de la curva, para reducir su ecuación a la forma más simple posible, es decir verificar si realmente se llegan a las conclusiones siguientes:

1.° Si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación puede tomar la forma

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \text{ que es una elipse.}$$

2.° Si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación puede tomar la forma

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1, \text{ que es una hipérbola.}$$

3.° Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación puede tomar la forma

$$Y^2 = KX, \text{ que es una parábola.}$$

Vamos a ver que cualquiera que sea el tipo de curva, basta trasladar el origen a un punto conveniente y girar los ejes un ángulo adecuado.

84. Caso de la elipse y de la hipérbola. — Traslademos los ejes paralelamente a sí mismos y tomemos el centro C como nuevo origen, haciendo

$$x = x_0 + X \qquad \text{e} \qquad y = y_0 + Y.$$

El cálculo se ha realizado ya en el capítulo anterior, en el párrafo 81, *y se ha visto que los términos de primer grado desaparecen*; resulta

$$AY^2 + BXY + CX^2 + F_1 = 0 \qquad (2)$$

haciendo

$$F_1 = Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2 + Dy_0 + Ex_0 + F.$$

La expresión de F_1 puede simplificarse: en efecto, consideremos las ecuaciones que proporcionan las coordenadas del centro

$$2Ay_0 + Bx_0 + D = 0 \quad \text{y} \quad By_0 + 2Cx_0 + E = 0,$$

Multipliquemos la primera por y_0, y la segunda ecuación por x_0 y sumémoslas miembro a miembro

$$2Ay_0^2 + 2Bx_0y_0 + 2Cx_0^2 + Dy_0 + Ex_0 = 0$$

o bien

$$Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2 + \frac{Dy_0}{2} + \frac{Ex_0}{2} = 0,$$

y puesto que esta suma es nula, se observa que la expresión de F_1 se reduce a

$$\boxed{F_1 = \frac{Dy_0}{2} + \frac{Ex_0}{2} + F}$$

— *Giremos los ejes un ángulo* α desconocido por ahora. Sabemos ya *que los términos en* XY *desaparecen,* como lo hemos visto en el ejemplo expuesto al principio de este sexto tomo en la página 42.

Sustituyendo en la ecuación de la cónica, cuyo centro se encuentra ahora en el origen (ver fórmulas de rotación de los ejes en el párrafo 17):

$$X \text{ por } (X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha) \quad \text{e} \quad Y \text{ por } (X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha).$$

Se obtiene

$$A(X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha)^2 + B(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha)(X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha) + C(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha)^2 + F_1 = 0$$

o sea

$$\begin{aligned} &Y^2(A\cos^2\alpha - B\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha) \\ &+ XY(2A\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\operatorname{sen}^2\alpha - 2C\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha) \\ &+ X^2(A\operatorname{sen}^2\alpha + B\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + C\cos^2\alpha) + F_1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Anulemos el término en XY

$$(A - C)2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0$$

$$(A - C)\operatorname{sen}2\alpha + B\cdot\cos 2\alpha = 0$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2 = \frac{-B}{A - C}} \tag{4}$$

valor que vale incluso para $A = C(\alpha = 45°)$, pero no si se tiene simultáneamente

$$B = 0 \qquad y \qquad A = C,$$

y en este caso la cónica es un círculo.

La fórmula (4) dará siempre para 2α un valor real, y no hay más que una manera de efectuarlo: en efecto, llamemos $2\alpha_0$ al ángulo más pequeño positivo cuya tangente es $-\dfrac{B}{A-C}$. Los valores de 2α serán

$$2\alpha = 2\alpha_0 \qquad 2\alpha = 2\alpha_0 + \pi \qquad 2\alpha = 2\alpha_0 + 2\pi \qquad \text{etc.}$$

$$\alpha = \alpha_0 \qquad \alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = \alpha_0 + \pi \qquad \text{etc.},$$

y esos valores de α dan, por consiguiente, dos rectas perpendiculares, que corresponden a un conjunto único de ejes; y no existe más que una única manera de colocarlos.

85. Ecuaciones reducidas de la elipse y de la hipérbola. — Para simplificar la escritura, hagamos en la ecuación (3)

$$M = A\cos^2\alpha - B\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha + C\,\text{sen}^2\alpha, \tag{5}$$

$$N = A\,\text{sen}^2\alpha + B\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \tag{6}$$

y sustituyendo en la ecuación (3) se obtiene

$$\boxed{MY^2 + NY^2 + F_1 = 0}$$

que es la nueva ecuación de la cónica.

— Calculemos ahora M y N. Las fórmulas (5) y (6) dan, al sumarlas y restarlas

$$M + N = A + C \tag{7}$$

$$M - N = (A - C)\cos 2\alpha - B\cdot\,\text{sen}\,2\alpha.$$

Pero de la fórmula (4), puede deducirse

$$\text{sen}\,2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \qquad y \qquad \cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}},$$

lo que proporciona

$$M - N = \frac{(A-C)(A-C)}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + B\cdot\frac{B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}$$

$$M - N = \sqrt{B^2 + (A-C)^2}. \tag{8}$$

Las fórmulas (7) y (8) dan entonces

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right] \\ N &= \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right] \end{aligned}} \qquad (9)$$

El problema queda resuelto, y partiendo de la ecuación inicial de la cónica (ecuación (1)) pueden calcularse M, N y F_1.

Nota. — En las fórmulas de sen 2α y cos 2α, se puede tomar el signo $\pm$ ante el radical, lo que supone que sen 2α tiene signo contrario de B.

—*¿En qué casos se tienen elipse o hipérbola?*

Haciendo el producto $-4MN$, resulta

$$-4MN =$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right] \cdot \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right]$$

$$= -\left[(A + C)^2 - B^2 - (A - C)^2\right] = B^2 - 4AC,$$

de donde se saca la consecuencia importante siguiente:

si $B^2 - 4AC < 0$ (elipse), M y N *tienen el mismo signo,*
si $B^2 - 4AC > 0$ (hipérbola), M y N *tienen signos contrarios.*

La ecuación de la cónica se transforma:

1.° *Caso de elipse,*

$$NX^2 + MY^2 + F_1 = 0$$

o bien

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

2.° *Caso de hipérbola,*

$$NX^2 - MY^2 + F_1 = 0$$

o bien

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Nota. — Se acaba de ver que

$-4MN = B^2 - 4AC =$ constante independiente de α.

Por tanto ,si se giran los ejes rectangulares, $B^2 - 4AC$ permanece constante, y la naturaleza de la curva no varía.

86. Caso de la parábola. — Al no existir centro en la parábola no pueden hacerse desaparecer los términos de primer grado para obtener la ecuación (2).

Partamos de la ecuación (1):

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

y apliquémosle los cálculos anteriores. Al hacer girar los ejes obtendremos una expresión de la forma:

$$MY^2 + NX^2 + RY + SX + F = 0,$$

pero como

$$B^2 - 4AC = 0 = -4MN,$$

es necesario que M o N sean nulos. Por otra parte, las fórmulas (7) y (8) se transforman en las

$$\left|\begin{array}{l} M + N = A + C, \\ M - N = \sqrt{4AC + (A - C)^2} = \sqrt{(A + C)^2} = \pm (A + C). \end{array}\right. \qquad (9)$$

Supongamos $A > 0$, de donde $C > 0$, pues de lo contrario la ecuación no sería una parábola ($B^2 = 4AC$); entonces, para la solución positiva del radical escribiremos

$$M - N = A + C. \qquad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) dan

$$M = A + C \quad \text{y} \quad N = 0.$$

Por tanto, en el caso de la parábola, si se elimina el término en XY, también desaparece uno de los cuadrados al mismo tiempo.

Por último, la expresión reducida de la parábola es

$$MY^2 + RY + SX + F = 0 \qquad (11)$$

— *Cálculo de* R *y de* S

Cuando en la ecuación (1) se giran los ejes, sustituyendo

$$X \text{ por } (X \cos \alpha + Y \cos \alpha) \quad \text{e} \quad Y \text{ por } (X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha),$$

los coeficientes de Y y de X se convierten en

$$D(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha) \quad \text{y} \quad E(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha),$$

se tiene

$$\left|\begin{array}{l} R = \text{nuevo coeficiente de } Y = D \cos \alpha - E \operatorname{sen} \alpha. \\ S = \text{nuevo coeficiente de } X = D \operatorname{sen} \alpha + E \cos \alpha. \end{array}\right.$$

Ahora bien, se ha encontrado

$$\cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} = \frac{A - C}{A + C}$$

de donde se deduce

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{C}{A+C}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A}{A+C}}. \tag{12}$$

Se ha supuesto que A y C son positivos, pero en cuanto a B puede ser positivo o negativo; entonces

$$\text{si} \quad B>0, \quad \operatorname{sen} 2\alpha<0, \quad 2\alpha>\pi, \quad \alpha>\frac{\pi}{2} \text{ y } \cos\alpha<0,$$

$$\text{si} \quad B<0, \quad \operatorname{sen} 2\alpha>0, \quad 2\alpha<\pi, \quad \alpha<\frac{\pi}{2} \text{ y } \cos\alpha>0,$$

Deducimos que $\cos\alpha$ *tiene siempre signo contrario* de B, y así se podrán calcular sin ambigüedad R y S.

Segunda transformación — Traslademos los ejes paralelamente a sí mismos con objeto de eliminar los términos en Y y la constante F.

— Sustituyamos ahora X por $(X + x_0)$ e Y por $(Y + y_0)$, llamando x_0 e y_0 a las coordenadas del nuevo origen. La ecuación (11) se transforma en la

$$M(Y + y_0)^2 + R(Y + y_0) + S(X + x_0) + F = 0$$

o bien

$$MY^2 + Y(2My_0 + R) + SX + (My_0^2 + Ry_0 + Sx_0 + F) = 0.$$

Hagamos

$$\left|\begin{array}{l} 2My_0 + R = 0 \\ My_0^2 + Ry_0 + Sx_0 + F = 0, \end{array}\right. \tag{13}$$

y sacando el valor de M de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda se obtiene:

$$-\frac{R}{2y_0}\cdot y_0^2 + Ry_0 + Sx_0 + F = 0$$

o

$$\frac{R}{2}y_0 + Sx_0 + F = 0. \tag{14}$$

De las ecuaciones (13) y (14), se deducen

$$\boxed{y_0 = -\frac{R}{2M} \quad \text{y} \quad x_0 = \frac{R^2 - 4MF}{4MS}}$$

Entonces, la ecuación reducida de la parábola es

$$\boxed{MY^2 + SX = 0 \quad \text{o} \quad Y^2 = KX}$$

que es la ecuación clásica de la parábola. Su eje es el de las X, y para cada valor de X existen dos de Y iguales y de signos contrarios, siendo el nuevo origen el vértice de la parábola. Por último, el eje de ordenadas es la tangente en el vértice.

87. Operaciones a realizar en la reducción de una cónica. — En resumen, reducir una cónica es transformar su ecuación en otra forma conocida de las curvas de segundo grado, estudiadas al principio de este tomo VI, y esto se realizará mediante un cambio conveniente.

— Las operaciones a efectuar sobre la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

son las siguientes:

1.° *Se determinan las coordenadas del centro anulando las dos derivadas parciales.*

2.° *Se traslada el origen a ese punto y se obtiene*

$$AY^2 + BXY + CX^2 + F_1 = 0$$

lo que exige el cálculo de F_1.

3.° *Se hacen girar los ejes un ángulo* α *tal que*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-B}{A - C},$$

y se obtiene la ecuación

$$MY^2 + NX^2 + F_1 = 0,$$

lo que exige el cálculo de M *y de* N.

Si no tiene centro (caso de la parábola), se hacen girar los ejes, lo que hace desaparecer el término en XY *y en* X^2 *y trasladando el origen se eliminan el término en* Y *y el término constante. Así se obtiene la ecuación de la parábola.*

$$Y^2 = KX.$$

— Apliquemos lo anterior de tres ejemplos.

88. Ejemplos.

1.° *Consideremos la elipse estudiada en el párrafo* 69:

$$y^2 - 4xy + 5x^2 - 6y + 7x + 15 = 0. \qquad (1)$$

— Trasladando el origen al centro $C(x_0y_0)$ de la elipse, la ecuación se transforma en la

$$AY^2 + BXY + CX^2 + F_1 = 0$$

con

$$F_1 = Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2 + Dy_0 + Ex_0 + F,$$

lo que da

$$Y^2 - 4XY + 5X^2 + (y_0^2 - 4x_0y_0 + 5x_0^2 - 6y_0 + 7x_0 + 15) = 0.$$

Las coordenadas del centro se han determinado anteriormente en el párrafo 81, anulando las derivadas parciales, o sea

$$x_0 = \frac{5}{2} \qquad y_0 = 8.$$

La ecuación se transforma en

$$Y^2 - 4XY + 5X^2 + \left(64 - 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8 + 5 \cdot \frac{25}{4} - 6 \cdot 8 + 7 \cdot \frac{5}{2} + 15\right) = 0$$

$$Y^2 - 4XY + 5X^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

— Si se giran los ejes un ángulo α, tal que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-B}{A - C} = \frac{4}{1 - 5} = -1,$$

se deduce

$$2\alpha = 135° \qquad \text{y} \qquad \alpha = 67°30'.$$

La cónica se reduce a la

$$MY^2 + NX^2 + F_1 = 0$$

en donde **M** y **N** vienen dadas por las ecuaciones (9) del párrafo 85:

$$M = \frac{1}{2}\left[1 + 5 + \sqrt{16 + (1 - 5)^2}\right] \simeq 5{,}8$$

$$N = \frac{1}{2}\left[1 + 5 - \sqrt{16 + (1 - 5)^2}\right] \simeq 0{,}2.$$

Obsérvese que **M** y **N** tienen el mismo signo.

La ecuación de la elipse se transforma en la

$$5{,}8Y^2 + 0{,}2X^2 - \frac{1}{4} = 0$$

o

$$23{,}2Y^2 + 0{,}8X^2 = 1,$$

o bien

$$\left(\frac{6 - \sqrt{32}}{2}\right) Y^2 + \left(\frac{6 + \sqrt{32}}{2}\right) X^2 = \frac{1}{4},$$

que se puede expresar fácilmente bajo la forma

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{X^2}{\beta^2} = 1,$$

a fin de deducir los dos valores α y β.

2.° *Consideremos la hipérbola, estudiada en el párrafo* 70:

$$y^2 - 4xy + 3x^2 + 2y + x - 5 = 0.$$

— Hallemos las coordenadas del centro:

$$\begin{cases} f'_{y_0} = 2y_0 - 4x_0 + 2 = 0 \\ f'_{x_0} = -4y_0 + 6x_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

de donde

$$x_0 = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad y_0 = +4.$$

Si se traslada el origen a ese centro, la cónica es

$$AY^2 + BXY + CX^2 + F_1 = 0$$

con

$$F_1 = \frac{Dy_0}{2} + \frac{Ex_0}{2} + F = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} - 5 = +\frac{1}{4},$$

y la ecuación de la hipérbola se escribe

$$Y^2 - 4XY + 3X^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

— Girando ahora los ejes un ángulo α tal que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-B}{A - C} = \frac{4}{1 - 3} = -2$$

y de aquí

$$2\alpha \simeq 116° \quad \text{y} \quad \alpha \simeq 58°.$$

La cónica se reduce a la $MY^2 + NX^2 + F_1 = 0$, con

$$M = \frac{1}{2}[1 + 3 + \sqrt{16 + (1-3)^2}] \simeq -4{,}2$$

$$N = \frac{1}{2}[1 + 3 - \sqrt{16 + (1-3)^2}] \simeq +0{,}2$$

viéndose que M y N tienen signos contrarios. La hipérbola puede escribirse entonces en la forma

$$4{,}2Y^2 - 0{,}2X^2 + \frac{1}{4} = 0$$

o bien

$$(2 + \sqrt{5})\,Y^2 - (2 - \sqrt{5})\,X^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Si se hace $X = y$ e $Y = x$, se puede expresar por la ecuación

$$-16{,}8x^2 + 0{,}8y^2 = 1,$$

que es la ecuación clásica de la hipérbola.

3.° *Sea la cónica*

$$4y^2 + 4xy + x^2 + y - 2x + 1 = 0.$$

— Se tiene $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$, por tanto es una parábola. Girando los ejes un ángulo α tal que

$$\cos 2\alpha = \frac{A - C}{A + C} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

y de aquí

$$2\alpha \simeq 53° \qquad \text{y} \qquad \alpha \simeq 26°30',$$

la ecuación se transforma en la

$$MY^2 + NX^2 + RY + SX + F = 0.$$

Con

$$M = A + C = 4 + 1 = 5 \qquad \text{y} \qquad N = 0,$$

de donde

$$5Y^2 + RY + SX + 1 = 0.$$

Como B es positivo se tomará $\cos\alpha < 0$. En este caso se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{C}{A + C}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{A}{A + C}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

y

$$\begin{cases} R = D\cos\alpha - E\,\text{sen}\,\alpha - \dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\ S = D\,\text{sen}\,\alpha + E\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} - 2\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = +\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

—Traslademos ahora los ejes paralelamente a sí mismos, y desplacemos el origen a un punto x_0y_0, tal que

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{R^2 - 4MF}{4MS} = \dfrac{0 - 4\cdot 5\cdot 1}{4\cdot 5\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ y_0 = -\dfrac{R}{2M} = 0. \end{cases}$$

La parábola se escribe entonces $MY^2 + SX = 0$, es decir

$$5Y^2 + \sqrt{5}\,X = 0$$

o bien

$$Y^2 = -\frac{X}{\sqrt{5}}$$

que es la ecuación de una parábola de eje horizontal.

89. Resumen. — Anteriormente, al estudiar la determinación del centro de una cónica desplazando el origen y haciendo

$$x = x_0 + X \qquad \text{e} \qquad y = y_0 + Y,$$

se ha encontrado que el coeficiente de Y era f'_{y_0} y el de X f'_{x_0}. Por otra parte, el término constante, que hemos llamado F_1, era

$$F_1 = Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2 + Dy_0 + Ex_0 + F.$$

Se observa que esta expresión es sencillamente la ecuación *primitiva* de la cónica, en la que se han sustituido y por x_0 e y por y_0; la designaremos por $f(x_0, y_0)$.

— **En resumen,** si

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

es la ecuación de una cónica referida a los ejes Ox y Oy de origen O, y si se refiere esta curva a un sistema de ejes paralelos a los primeros, y de origen O′ cuyas coordenadas son x_0 e y_0 cualesquiera, la ecuación de la cónica es

$$\boxed{AY^2 + BXY + CX^2 + Y\cdot f_y'(x_0, y_0) + X\cdot f_x'(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = 0}$$

ecuación que se presta fácilmente a las aplicaciones numéricas.

Ejemplo. — *Sea la cónica*

$$f(x, y) = 3y^2 - 5xy + 2x^2 - 7y + 6x = 0.$$

— Las ecuaciones que proporcionan las coordenadas del centro son

$$f_x' = -5y + 4x + 6 = 0$$
$$f_y' = \quad 6y - 5x - 7 = 0$$

de donde se deduce

$$x_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad y_0 = 2.$$

Si se traslada el centro a ese punto, el término constante F_1 se transforma en

$$f(x_0, y_0) = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 + 6 = -4,$$

y, como los términos de primer grado deben desaparecer, la ecuación de la cónica resultante es

$$3Y^2 - 5XY + 2X^2 - 4 = 0.$$

90. Consecuencias. Cónicas referidas a sus ejes. — Anteriormente se ha visto que, cuando se trasladan los ejes paralelamente a sí mismos, en la ecuación general de la cónica, siendo el nuevo origen el centro de ella, los términos de primer grado desaparecen.

— *Inversamente,* vamos a demostrar que si una cónica viene expresada en la forma

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

los ejes de la cónica son paralelos a los ejes de coordenadas, y esto cualesquiera que sean los coeficientes.

— En efecto, si hacemos aparecer cuadrados perfectos, la ecuación de la cónica puede escribirse en la forma

$$A\left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(x + \frac{E}{2C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} = 0.$$

Por consiguiente, si se trasladan los ejes paralelamente a sí mismos al punto

$$x_0 = -\frac{E}{2C} \qquad y_0 = -\frac{D}{2A}$$

que es el centro de la cónica, ya que

$$f_x' = 2Cx + E = 0 \qquad f_y' = 2Ay + D = 0,$$

la ecuación resultante es

$$AY^2 + CX^2 + K = 0.$$

La cónica está referida a sus ejes, y los antiguos ejes de coordenadas son paralelos a los ejes de la cónica (se supone $A \neq 0$ y $C \neq 0$).

CAPITULO IX

CONICAS (Continuación)

DIAMETROS — EJES — FOCOS — DIRECTRICES

91. Ecuación común a las tres cónicas. — Vamos a ver que la elipse, la hipérbola y la parábola se pueden representar por una ecuación única, común a las tres curvas, tomando el origen en el vértice de la curva y siendo el eje de las x el eje de la que pasa por ese punto y dirigido hacia el sentido de la concavidad de la curva, y el de las y la tangente en el vértice.

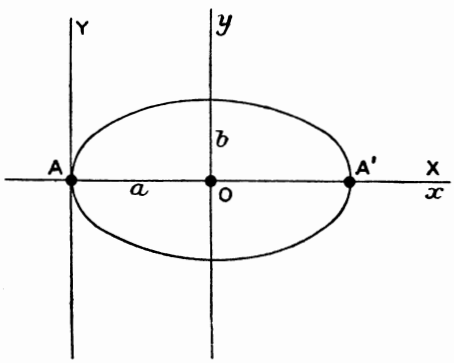

FIG. 80

— 1.° Consideremos en primer lugar la elipse (fig. 80) de centro O

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y traslademos los ejes al vértice A; las fórmulas de transformación de coordenadas, llamando X e Y a las coordenadas con relación a los nuevos ejes AX y AY, son entonces

$$X = x + a \qquad \text{e} \qquad Y = y.$$

La ecuación se transforma en la

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

o bien

$$\frac{Y^2}{b^2}=1-\frac{X^2}{a^2}+\frac{2Xa}{a^2}-1$$

$$Y^2=\frac{2b^2X}{a}-\frac{b^2}{a^2}X^2$$

y al hacer

$$\frac{b^2}{a}=p \qquad \text{y} \qquad -\frac{b^2}{a^2}=r, \tag{1}$$

se tendrá

$$Y^2=2pX+rX^2.$$

2.° Tomemos la hipérbola (fig. 81)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

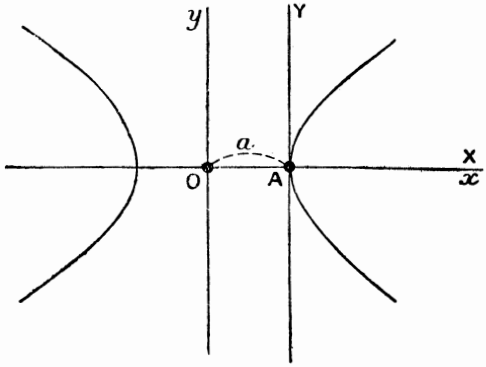

FIG. 81

Traslademos el origen al vértice A, y sean AX y AY los nuevos ejes. Las coordenadas nuevas son X e Y

$$X=x-a \qquad \text{e} \qquad Y=y.$$

Entonces, la expresión para la nueva ecuación será

$$\frac{(X+a)^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

o bien

$$\frac{Y^2}{b^2}=\left(\frac{X^2}{a^2}+1+\frac{2Xa}{a^2}\right)-1$$

e

$$Y^2 = \frac{2Xb^2}{a} + \frac{b^2}{a^2}X^2$$

Hagamos

$$\frac{b^2}{a} = p \qquad \text{y} \qquad \frac{b^2}{a^2} = r,$$

se obtiene la ecuación de la hipérbola

$$Y^2 = 2px + rX^2.$$

3.° Consideremos la parábola clásica, de eje horizontal, siendo el eje vertical, como de costumbre, la tangente en el vértice:

$$y^2 = 2px,$$

se transforma (puesto que $X = x$ e $Y = y$):

$$Y^2 = 2pX \quad (\text{con } r = 0).$$

Resumiendo, la ecuación común a las tres cónicas es

$$\boxed{Y^2 = 2pX + rX^2}$$

en la que p es el parámetro. Téngase en cuenta que p es positivo, y es una longitud, mientras que r es una función, tal que

si $r > 0$	se tiene una hipérbola
si $r < 0$	se tiene una elipse
si $r = 0$	se tiene una parábola

e inversamente.

Lso semiejes se obtienen a partir de las fórmulas (1) con dos incógnitas a y b, siendo ahora conocidos p y r:

$$\text{para una elipse} \qquad a = -\frac{p}{r}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{-r}},$$

$$\text{para una hipérbola} \qquad a = +\frac{p}{r}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{r}}.$$

92. La parábola es el límite de una elipse o de una hipérbola. — Es fácil ver que si en una elipse o en una hipérbola uno de los vértices permanece fijo y *el otro se aleja hasta el infinito*, se obtiene una parábola.

— En efecto, hallemos a partir de la ecuación común a las tres cónicas, las abscisas de los dos vértices anulando Y:

$$0 = 2pX + rX^2 = X(2p + rX)$$

de donde

$$\left| \begin{array}{l} X = 0 \quad \text{(primer vértice, origen)} \\ X = -\dfrac{2p}{r} \quad \text{(segundo vértice)} \end{array} \right.$$

Para que el segundo vértice tienda hacia el infinito es necesario que, siendo variables p y r, r *tienda a cero* (con $p \neq 0$). En este caso la ecuación de la cónica se reduce a

$$Y^2 = 2pX$$

que es una parábola.

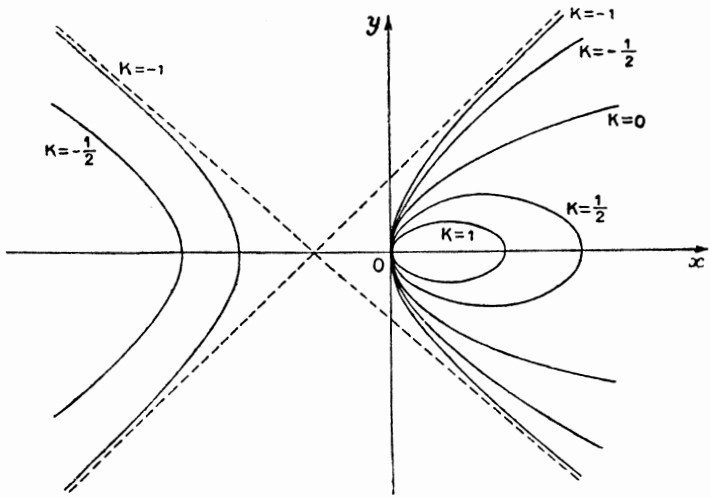

FIG. 82

Ejercicio. — Discutir la cónica

$$2y^2 + Kx^2 - 8x = 0$$

según los valores de K.

— Si $K = 0$, se tiene $2y^2 = 8x$, que es una parábola.

Si $K \neq 0$, se tiene

$$B^2 - 4AC = 0 - 8K$$

y si $K > 0$, se tiene una elipse

si $K < 0$, se tiene una hipérbola.

Por otra parte, para $x = 0$, $y = 0$ y la curva pasa por el origen.

Si se traslada el origen al punto $\left(\frac{4}{K}, 0\right)$ la ecuación de la cónica se transforma en la

$$\frac{X^2}{\frac{16}{K^2}} + \frac{Y^2}{\frac{8}{K}} = 1.$$

En la figura (82) se han trazado algunas curvas para

$$K = 1, \quad K = \frac{1}{2}, \quad K = 0, \quad K = -\frac{1}{2} \quad K = -1.$$

Si $K > 0$ y $\to 0$, las elipses se alargan y se aproximan a la parábola.

Si $K < 0$ y $\to 0$, las hipérbolas de la derecha se aproximan a la parábola, y las ramas de la izquierda se alejan hasta el infinito.

DIAMETROS

93. Definición. — *Se llama diámetro de una curva* C *a una línea* DD′ *que divide en dos partes iguales a todas las cuerdas* MN, M′N′, ..., *paralelas a una dirección dada* (fig. 83).

— Hallemos ahora la ecuación de esta curva DD′, o diámetro, conociendo la ecuación de la curva C, $f(x, y) = 0$.

Las cuerdas paralelas a una dirección dada pueden escribirse

$$y = mx + p$$

en donde m es una constante dada y p un parámetro variable. Para conocer las abscisas de los puntos de intersección de la recta y de la curva C, se eliminará y entre estas dos ecuaciones, obteniendo

$$f(x, mx + p) = 0,$$

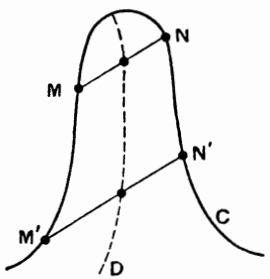

FIG. 83

ecuación que tendrá, en general, dos raíces, x' y x'', siendo la abscisa del centro de la cuerda $\frac{x' + x''}{2}$.

— Aquí nos limitaremos a estudiar los diámetros de las cónicas. Sea, pues, la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0; \qquad (1)$$

sustituyendo y por $mx + p$, se obtiene una ecuación en x, de la forma

$$Rx^2 + 2Sx + T = 0, \tag{2}$$

ecuación de segundo grado que tendrá, como máximo, dos raíces x' y x''. La abscisa del punto medio es, pues,

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2} = \frac{-\frac{2S}{R}}{2} = -\frac{S}{R}$$

de donde

$$Rx_1 + S = 0. \tag{3}$$

Obsérvese que esta ecuación se obtiene anulando la derivada con relación a x de la ecuación (2), es decir, la derivada de la ecuación (1) considerando y como función igual a $mx + p$ y sustituyendo, a continuación y por este valor. Se tiene, pues, *aplicando el cálculo de la derivada de una función compuesta* ($f_u' \cdot u' + f_v' \cdot v'$):

$$(2Ay + Bx + D) \cdot m + (By + 2Cx + E) = 0. \tag{4}$$

Esta ecuación representa el diámetro. En efecto, si en ella se sustituye y por $mx + p$, bastará escribir y en lugar de $mx + p$ para eliminar p, se obtiene de nuevo la ecuación (4).

— Obsérvese que esta ecuación (4) es de primer grado, y *todos los diámetros serán rectas.*

— *Se puede expresar la ecuación* (4) *en una forma clara y sencilla, fácil de recordar*: efectivamente, si se representa por $f(x, y)$ la ecuación de la cónica, la del diámetro será:

$$\boxed{m \cdot f_y' + f_x' = 0} \tag{5}$$

que representa, por consiguiente, el lugar geométrico del centro de las cuerdas paralelas a una dirección dada.

Discusión:

1.° *Curva del género elipse o hipérbola*: La ecuación anterior representa una recta que pasa por el punto de intersección de las dos rectas

$$f_x' = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y' = 0$$

que son las que pasan por el centro. Resulta de ello que *los diámetros pasan por el centro, e, inversamente, que toda recta que pasa por el centro es un diámetro.*

2.° *Curva del tipo parábola*: en este caso $B^2 - 4AC = 0$, y las derivadas parciales

$$f_x' = 2Cx + By + E = 2Cx + 2\sqrt{AC}y + E$$

$$f_y' = 2Ay + Bx + D = 2Ay + 2\sqrt{AC}x + D$$

representan dos rectas que tienen el mismo coeficiente angular $-\sqrt{\frac{C}{A}}$, siendo, por tanto, paralelas.

En consecuencia, todos los diámetros de la parábola son paralelos a la dirección común de las rectas

$$f_x' = 0 \quad \text{y} \quad f_y' = 0,$$

es decir, que su pendiente es

$$m' = -\sqrt{\frac{C}{A}} = -\frac{B}{2A}$$

3.° Se puede ver fácilmente que *la tangente en el extremo de un diámetro es paralela a las cuerdas que dicho diámetro divide en dos partes iguales.*

— Efectivaemnte, la ecuación

$$m \cdot f_y' + f_x' = 0$$

da

$$m = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D},$$

en donde x e y son las coordenadas del punto común a la curva y al diámetro. Por tanto, este valor es precisamente el coeficiente angular de la tangente a la curva,

$$f(x, y) = 0,$$

siendo, pues, la tangente paralela a las cuerdas.

94. Relación entre los coeficientes angulares del diámetro y de las cuerdas conjugadas. — Hemos visto anteriormente que la ecuación del diámetro conjugado de la dirección $y = mx$ es

$$m \cdot f_y' + f_x' = 0.$$

Busquemos la relación que existe entre m y el coeficiente angular del diámetro. Este último viene dado por la recta

$$m(2Ay + Bx + D) + (By + 2Cx + E) = 0$$

o

$$x(Bm + 2C) + y(2Am + B) + mD + E = 0$$

$$y = -\frac{Bm + 2C}{2Am + B} \cdot x - \left(\frac{mD + E}{2Am - B}\right),$$

siendo la pendiente de esta recta

$$m' = -\frac{Bm + 2C}{2Am + B}$$

o bien

$$Bm' + 2Am \cdot m' + Bm + 2C = 0,$$

que puede escribirse también

$$\boxed{2Am \cdot m' + B(m + m') + 2C = 0}$$

Esta relación es simétrica respecto de m y m', es decir, que no varía si se sustituye m por m', y m' por m. Se deduce de ello que si en una elipse o en una hipérbola se consideran dos diámetros cuyos coeficientes angulares son m y m', *cada uno de ellos divide en dos partes iguales a las cuerdas paralelas al otro.*

Reciben el nombre de *diámetros conjugados.*

95. Ejemplos:

1.° *Hallar la ecuación del diámetro conjugado con la recta dependiente* $m = 4$ *en la cónica*

$$4y^2 - 5xy + 3y - 2x + 1 = 0.$$

—La fórmula (5) da

$$4 \cdot f_y' + f_x' = 0 \quad \text{o} \quad 4(8y - 5x + 3) + (-5y - 2) = 0$$

o bien

$$27y - 20x + 10 = 0$$

que es la ecuación buscada.

2.° *Hallar la ecuación del diámetro conjugado con la dirección del eje de las x en la cónica*

$$3y^2 - 10xy + 4x^2 - 2x - 3 = 0.$$

— Aquí $m = 0$, teniéndose para este diámetro:

$$f_x' = 10y + 8x - 2 = 0.$$

Observación. — Sea la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o bien

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La fórmula (6) nos da para m' (puesto que B = 0):

$$m' = -\frac{C}{Am} = -\frac{b^2}{a^2m}$$

de donde

$$m \cdot m' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Se hallaría, operando análogamente en la hipérbola:

$$m \cdot m' = \frac{b^2}{a^2},$$

y la ecuación del diámetro es (ya que éste pasa por el centro):

$$Y = \frac{1}{m}\frac{b^2}{a^2}X.$$

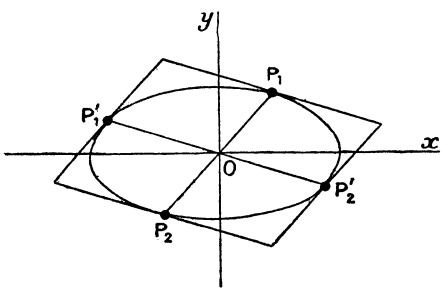

FIG. 84

— En el caso de la elipse, es igualmente cierto que las tangentes en los extremos de cada diámetro son paralelas al diámetro conjugado, pues las tangentes en P_1, P_2 y P'_1, P'_2 de la figura 84 forman un paralelogramo circunscrito a la elipse.

96. Angulo de dos diámetros conjugados. — Sean

$$m = \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{y} \qquad m' = \operatorname{tg} \alpha'$$

las pendientes de dos diámetros conjugados. El ángulo θ que forman entre sí viene dado por la fórmula

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}.$$

Observación. — La condición necesaria y suficiente para que en una cónica sean conjugados los ejes Ox y Oy es que se verifique que para $m = 0$ se tenga $m' = \infty$. La ecuación (6) que da m' nos muestra que B debe ser nulo, y la cónica se reduce entonces a

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

En una parábola, en donde $B^2 - 4AC = 0$, queda

$$-4AC = 0$$

es decir

$$A = 0 \qquad o \ bien \qquad C = 0,$$

no existe ,por tanto, término en y^2, ni siquiera en x^2.

97. Diámetro de la parábola. — Sea la parábola

$$y^2 = 2px$$

y la recta

$$y = mx + h.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones conoceremos los puntos de intersección

$$(mx + h)^2 = 2px$$

o bien

$$m^2x^2 + 2(mh - p)x + h^2 = 0. \qquad (1)$$

Consideremos una cuerda de pendiente m, y sea P el punto medio de aquélla. Llamemos X e Y a las coordenadas de dicho punto. Hallemos el lugar geométrico de P. La abscisa X será la semisuma

de las abscisas de los puntos de intersección de la recta y de la parábola, o sea, la semisuma de las raíces de la ecuación precedente

$$X = \frac{p - mh}{m^2} \tag{2}$$

y

$$X = mX + h.$$

Para hallar el lugar de P, cuando varía h, eliminemos h: la ecuación (2) da

$$m^2X = p - m(Y - mX)$$

o bien

$$0 = p - mY$$

entonces

$$Y = \frac{p}{m} = \text{constante},$$

por consiguiente, el lugar geométrico, o el diámetro, es una recta paralela al eje de la parábola, cuya ordenada es $\frac{p}{m}$.

EJES DE LAS CONICAS

98. Definición. — Entre los diámetros de una cónica, ¿existe alguno que sea perpendicular a las cuerdas y que las divida en partes iguales? Ese diámetro particular se llama *eje*.

— Habrá de tenerse

$$m' = -\frac{1}{m}.$$

Sustituyendo en la ecuación (6), se obtiene

$$-\frac{1}{m} = -\frac{Bm + 2C}{2Am + B}$$

o bien

$$2Am + B = m(Bm + 2C)$$

$$Bm^2 + 2(C - A)m - B = 0 \tag{7}$$

$$m^2 + 2\left(\frac{C - A}{B}\right)m - 1 = 0, \tag{7 bis}$$

esta ecuación tiene dos raíces, cuyo producto es -1, existiendo, pues, dos direcciones rectangulares.

— Para obtener la ecuación de los ejes, basta escribir que los dos diámetros verifican la ecuación (7), es decir, se sustituirá m por los valores sacados de la ecuación de los diámetros:

$$m \cdot f_y' + f_x' = 0$$

$$m = -\frac{f_x'}{f_y'}$$

lo que nos da

$$\frac{f_x'^2}{f_y'^2} - 2\frac{(C - A)}{B} \cdot -\frac{f_x'}{f_y'} 1 = 0$$

o bien

$$f_x'^2 - 2\frac{(C - A)}{B} \cdot f_x' f_y' - f_y'^2 = 0$$

o, aun

$$\boxed{Bf_x'^2 - 2(C - A)f_x' f_y' - Bf_y'^2 = 0} \qquad (8)$$

Cuando se conocen las coordenadas del centro, $x_0 y_0$, se obtendrá la ecuación del conjunto de los ejes sustituyendo en la ecuación (7), la pendiente m por su valor

$$m = \frac{x - y_0}{x - x_0},$$

resultando

$$B(y - y_0)^2 - 2(C - A)(y - y_0)(x - x_0) - B(x - x_0)^2 = 0.$$

Si el centro de la cónica está en el origen, tendremos:

$$By^2 - 2(C - A)xy - Bx^2 = 0.$$

Caso de la parábola. Partiendo de la ecuación (7)

$$Bm^2 + 2(C - A)m - B = 0.$$

Se obtiene

$$m = \frac{A - C \pm \sqrt{(C - A)^2 + B^2}}{B};$$

ya que $B^2 - 4AC = 0$, resulta:

$$m = \frac{A - C \pm \sqrt{(C-A)^2 + 4AC}}{B}$$

$$= \frac{A - C \pm (C - A)}{B} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{2A}{B} \\ m_2 = -\dfrac{2C}{B} = -\dfrac{B}{2A}. \end{cases}$$

Pero el valor $-\frac{B}{2A}$ no corresponde a nada (ver en páginas anteriores la discusión de los diámetros), porque es la pendiente de los diámetros.

Así, la dirección de las cuerdas principales es

$$m = m_1 = \frac{2A}{B}$$

y la ecuación del eje de la parábola

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{2AD + BE}{4A^2 + B^2}.$$

— En resumen, la elipse y la hipérbola tienen dos ejes perpendiculares entre sí, en tanto que la parábola sólo tiene uno.

Ejemplo. — Hallar la ecuación de los ejes de la cónica

$$y^2 - 3xy + 5x^2 + 2y - 3x - 5 = 0.$$

— No es práctica la aplicación de la ecuación (8), resultando mucho más cómodo sustituir las dos raíces de la ecuación (7) en la (5), que escribiremos de nuevo

$$m \cdot f_y' + f_x' = 0.$$

Aquí $A = 1$, $B = -3$, $C = 5$, expresándose la ecuación (7)

$$-3m^2 + 8m + 3 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = +3$ y $m_2 = -\frac{1}{3}$.

Sustituyendo en la ecuación (5) obtendremos para $m_1 = 3$:

$$3(2y - 3x + 2) + (-3y + 10x - 3) = 0,$$

de donde la ecuación del primer eje es

$$3y + x + 3 = 0,$$

y para $m_2 = -\frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3}(2y - 3x + 2) + (-3y + 10x - 3) = 0$$

o bien

$$-\frac{11}{3}y + 11x\frac{11}{3} - = 0,$$

es decir

$$y - 3x + 1 = 0,$$

que es la ecuación del segundo eje.

Vértice de una cónica. — Los vértices son los puntos de intersección de la curva y del eje, y, para hallarlos, basta resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la curva y la de los ejes, lo que no presenta dificultad alguna.

99. Teoremas de Apolonio. — Consideremos el caso de una elipse.

Primer teorema. — La suma de los cuadrados de los semidiámetros conjugados es constante.

— Consideremos el círculo de la figura 85, situado en un plano que forma, por ejemplo, un ángulo φ con el plano horizontal; se sabe que la proyección del círculo sobre dicho plano es una elipse (ver capítulo II): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

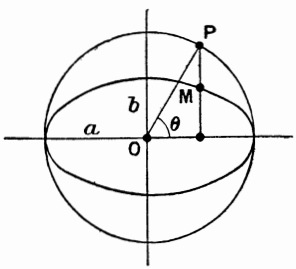

FIG. 85

Hemos visto anteriormente (fig. 9) que la ordenada de un punto de la elipse es igual a la ordenada correspondiente del círculo de radio a, multiplicado por $\frac{b}{a}$. Luego, las coordenadas de un punto M de la elipse (fig. 85) se pueden escribir en forma paramétrica, llamando θ al ángulo del radio vector OP que viene a parar a la circunferencia,

$$x = a \cdot \cos\theta$$

e

$$y = \frac{b}{a} \cdot a \operatorname{sen}\theta = b \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Gracias a estas notaciones, el teorema de APOLONIO se demuestra fácilmente (fig. 86).

Tracemos dos radios vectores *perpendiculares* OC′ y OD′ (fig. 86) en el círculo de radio a: los puntos C′ y D′ del círculo corresponden con los puntos C y D de la elipse, y los diámetros CC_1 y DD_1 de la elipse son, por consiguiente, conjugados (son las proyecciones de los dos diámetros conjugados del círculo).

La abscisa de C es la misma que la de C′, o sea

$$x = a \cdot \cos\theta$$

y la ordenada de C es $y = b \operatorname{sen}\theta$.

Asimismo

$$OC^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$OD^2 = a^2 \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + b^2 \operatorname{sen}^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta,$$

de donde

$$OC^2 + OD^2$$

$$= a^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + b^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= a^2 + b^2 = \text{constante.}$$

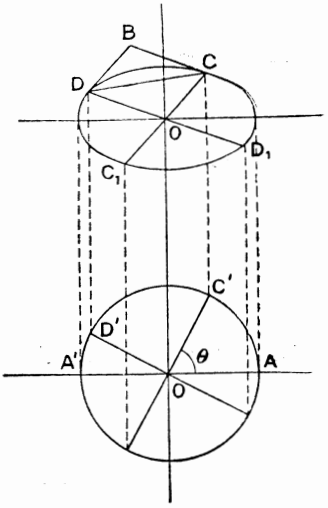

FIG. 86

Segundo teorema. — El área del paralelogramo construido sobre los semidiámetros conjugados, es constante.

— El área del paralelogramo OCBD construido sobre OC y OD es doble de la del triángulo OCD. Ahora bien, esta última área es la proyección de la del triángulo OC′D′, que es igual a

$$\frac{1}{2} CO' \cdot OD' = \frac{a^2}{2}$$

Luego, tendremos

$$\text{área del triángulo OCD} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{2},$$

y la del paralelogramo construido sobre los dos semidiámetros conjugados será el doble de esta expresión, siendo, pues, constante e igual a ab.

DIRECTRICES Y FOCOS

100. Estudio de directrices y focos.

1.° **Elipse.** — Sea la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en la que la distancia entre los dos focos FF′ es 2c (fig. 87). Tenemos

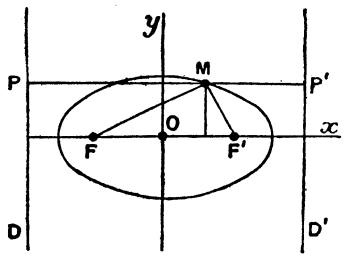

FIG. 87

$$\left|\begin{array}{l} MF^2 = (x + c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (c - x)^2 + y^2, \end{array}\right.$$

de donde

$$\left|\begin{array}{ll} MF^2 + MF'^2 = 2x^2 + 2c^2 + 2y^2 & (1) \\ MF^2 - MF'^2 = 4cx, & (2) \end{array}\right.$$

luego

$$MF + MF' = 2a. \qquad (3)$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (3), obtenemos:

$$MF - MF' = \frac{2cx}{a}. \qquad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) nos dan los radios vectores

$$\left|\begin{array}{l} MF = a + \dfrac{cx}{a} = \dfrac{c}{a}\left(x + \dfrac{a^2}{c}\right) \\ MF' = a - \dfrac{cx}{a} = \dfrac{c}{a}\left(\dfrac{a^2}{c} + x\right). \end{array}\right.$$

Consideremos la recta D de ecuación $x + \frac{a^2}{c}$, de donde $x = -\frac{a^2}{c}$ y como $\frac{c}{a}$ es la excentricidad de e de la elipse, resulta (fig. 87) que $x + \frac{a^2}{c}$ es la distancia MP del punto M a la directriz, ya que

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a} = e.$$

La recta D se llama directriz.

De igual modo, si se traza la recta D′, de ecuación $\frac{a^2}{c} - x$, se tiene para el foco F′

$$x = +\frac{a^2}{c},$$

y como

$$\frac{MF'}{MP'} = e$$

se ve que $-\frac{a^2}{c}x$ es la distancia MP' del punto M a la otra directriz D'

En cualquier caso, los dos focos se encuentran a una distancia + c y —c del centro O, lo que nos servirá más adelante para hallar los focos de una cónica, utilizando la relación $a^2 - b^2 = c^2$.

2.° **Hipérbola.** — Consideremos la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en la que $a^2 + b^2 = c^2$, y $e = \frac{c}{a}$, siendo $2c$ la distancia entre los dos focos.

Haciendo un cálculo igual al anterior, daría para los radios vectores

$$MF = a + \frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right) \qquad (1)$$

$$MF' = -a + \frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right). \qquad (2)$$

Hay que deducir, todavía, la directriz: consideremos la recta $x + \frac{a^2}{c} = 0$ de donde $x = -\frac{a^2}{c}$ y tracemos en la figura 88 la recta D, cuya abscisa es $-\frac{a^2}{c}$. Un punto M de la hipérbola nos da entonces, llamando MP a su distancia a la recta D:

$$MP = x + \frac{a^2}{c}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$MF = \frac{c}{a} MP$$

o bien

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a}, \qquad \left(\text{siendo } \frac{c}{a} > 1\right)$$

relación, por consiguiente, constante, y la recta D es una de las dos directrices.

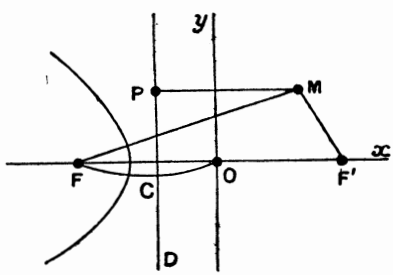

FIG. 88

Análogamente, se encontraría para el foco F' la directriz cuya abscisa vendría dada por la ecuación (2), es decir

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

Esta es la forma de determinar las directrices de la hipérbola.

3.° **Parábola.** — Sea

$$y^2 = 2px.$$

Sabemos que p es la distancia del foco a la directriz, encontrándose el vértice O, que es también el de la parábola, en el punto medio de la distancia del foco a la directriz, como se sabe.

— *Repetimos esto porque estos datos nos servirán para hallar, en el caso general, las coordenadas de los focos de una cónica y la ecuación de las directrices.*

Creemos que el método que acabamos de exponer es mucho más claro y sencillo que el enrevesado y oscuro empleado de ordinario...

101. Regla práctica. — Para hallar las coordenadas de los focos y la ecuación de las directrices, se reduce la ecuación de la cónica, es decir, se halla ésta con relación a su centro (o a su vértice), obteniendo así los valores a, b y c, que nos dan la posición de los focos. La ecuación de las directrices se obtiene aplicando las fórmulas precedentes.

Primer ejemplo. — Sea la hipérbola

$$-3y^2 + 2xy + x^2 + 6y - 2x = 0,$$

hallar las ecuaciones de los ejes, las coordenadas de los dos focos y la ecuación de las directrices.

— Se trata, sin duda, de una hipérbola, ya que A y C tienen signos contrarios.

Para trasladar el origen al centro hay que hallar las coordenadas de éste

$$f_x' = 0 \quad \text{y} \quad f_y' = 0,$$

o sea

$$2y + 2x - 2 = 0 \quad \text{y} \quad -6y + 2x + 6 = 0$$

de donde

$$y_0 = 1 \quad \text{y} \quad x_0 = 0.$$

Llevemos el origen O al centro; la ecuación de la cónica es

$$AY^2 + BXY + CX^2 + F_1 = 0$$

con

$$F_1 = \frac{Dy_0}{2} + \frac{Ex_0}{2} + F = \frac{6 \cdot 1}{2} + 0 + 0 = +3,$$

dicha ecuación se transforma en la

$$-3Y^2 + 2XY + X^2 + 3 = 0.$$

Hagamos ahora girar los ejes en un ángulo α tal que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-B}{A-C} = \frac{-2}{-3-1} = \frac{1}{2}.$$

La ecuación se reduce a

$$MY^2 + NX^2 + F_1 = 0$$

con

$$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{B^2 + (A-C)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-3 + 1 + \sqrt{4 + (-3-1)^2}\right]$$

$$= -1 + \sqrt{5}$$

y

$$N = -1 - \sqrt{5},$$

de donde la nueva ecuación de la hipérbola es

$$(-1 + \sqrt{5})Y^2 + (-1 - \sqrt{5})X^2 + 3 = 0$$

y dividiendo por $(-1 - \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$, o sea por -4:

$$\frac{X^2}{-1 + \sqrt{5}} + \frac{Y^2}{-1 - \sqrt{5}} - \frac{3}{4} = 0.$$

—*Si se prefiere que el nuevo eje de las* X *coincida con el eje transversal de la hipérbola,* sustituyamos X por Y, e inversamente, lo que nos da

$$\frac{X^2}{\frac{3}{4}(\sqrt{5}+1)} - \frac{Y^2}{\frac{3}{4}(\sqrt{5}-1)} = 1,$$

que es la ecuación clásica de la hipérbola,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se deducen fácilmente las coordenadas de los focos, las ecuaciones de las directrices y las coordenadas de los dos vértices:

1.° **Coordenadas de los focos.** — El foco F tiene por abscisa X, en el sistema de ejes XCY:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}},$$

siendo la del foco F'

$$-c = -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}},$$

siendo nulas sus ordenadas Y.

Calculemos las coordenadas en el sistema de ejes xOy, aplicando las fórmulas de cambio de ejes:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + (X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha) \\ y &= y_0 + (X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

siendo $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2}$. Pero, como X e Y se han invertido para expresar la ecuación de la hipérbola, con el fin de que el nuevo eje de las X coincida con el eje transverso de la hipérbola, el ángulo 2α no estará comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y sí entre π y $\frac{3\pi}{2}$, resultando así $\alpha > \frac{\pi}{2}$. En resumen, el invertir las X y las Y es como si se hubieran hecho girar de nuevo los ejes un ángulo de $+\frac{\pi}{2}$.

Entonces

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{2}$$

o bien

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$$

de donde $\operatorname{tg}\alpha_1 = -2 + \sqrt{5}$ y $\operatorname{tg}\alpha_2 = -2 - \sqrt{5}$,

y como $\operatorname{tg}\alpha$ debe ser negativa $\left(\alpha > \frac{\pi}{2}\right)$, sólo el valor $-2 - \sqrt{5}$ satisface, resultando que

el seno debe ser positivo: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}$,

el coseno debe ser negativo: $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}$.

Las ecuaciones (1) dan para el foco F

$$x_1 = 0 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} - 0 \cdot \operatorname{sen}\alpha\right) = -\frac{\sqrt{6\sqrt{5}}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}.$$

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} - 0 \cdot \cos\alpha\right) = 1 + \frac{\sqrt{6\sqrt{5}}\,(2+\sqrt{5})}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}.$$

Y para el Foco F′:

$$x_2 = +\frac{\sqrt{6\sqrt{5}}}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \qquad \text{e} \qquad y_2 = 1 - \frac{\sqrt{6\sqrt{5}}\,(2+\sqrt{5})}{2\sqrt{10+4\sqrt{5}}}.$$

2.° **Directrices.**

La directriz correspondiente al foco izquierdo F, y que es perpendicular al eje de las X, en el sistema de ejes XCY, tiene por ecuación:

$$X = -\frac{a^2}{c} = -\frac{\frac{3}{4}(\sqrt{5}+1)}{\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}}} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{6\sqrt{5}}},$$

y la correspondiente al foco derecho F′

$$X = +\frac{a^2}{c} = +\frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{6\sqrt{5}}}.$$

Hallemos las ecuaciones de estas directrices en el sistema de ejes xOy.

Basta despejar X e Y de las ecuaciones (1), obteniendo

$$\begin{cases} X = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\operatorname{sen}\alpha \\ Y = -(x - x_0)\operatorname{sen}\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases}$$

Entonces, se tendrá para la directriz correspondiente al foco de la izquierda F

$$(x-0)\left(\frac{-1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right) + (y-1)\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right) = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$$

ecuación de la forma $Ax + By = C$, que es una recta. La ecuación de la directriz correspondiente al foco derecho F′ se obtendrá igualando el miembro de la izquierda de la ecuación anterior $+\frac{3}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.

3.° **Vértices.**

Las coordenadas de los dos vértices de la hipérbola son, en el sistema de ejes XOY: $(a, 0)$ y $(-a, 0)$

siendo

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}$$

Hallemos los valores en el sistema de los ejes *xoy*: *basta sustituir en las ecuaciones* (1) X *por* $+a$ *o* $-a$, *por* Y *por* 0, lo que da para el vértice izquierdo:

$$\left|\begin{array}{l} x_s = 0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right) \\ y_s = 0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right) \end{array}\right.$$

y para el de la derecha

$$\left|\begin{array}{l} x_s = 0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right) \\ y_s = 0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right). \end{array}\right.$$

Observación. — Posiblemente, el método utilizado anteriormente para hallar los focos, las directrices y los vértices, sea más largo que el empleado habitualmente en los libros modernos, pero es, en cambio, mucho más claro y comprensible.

Segundo ejemplo. — En la cónica

$$4y^2 + x^2 - 2x\sqrt{3} - 1 = 0,$$

determinar su centro y sus focos.

— Siendo $B^2 - 4AC = -16$, se trata de una elipse.

Sumando y restando 3, se puede escribir

$$(x^2 - 2x\sqrt{3} + 3) + 4y^2 - 1 - 3 = 0$$

o sea

$$(x - \sqrt{3})^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x-\sqrt{3})^2}{4} + y^2 = 1,$$

el centro tiene, entonces, por coordenadas $x_0 = \sqrt{3}$ e $y_0 = 0$, siendo los semiejes $a = 2$, $b = 1$, y la semidistancia focal es:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3},$$

por consiguiente uno de sus focos se encuentra en el origen de coordenadas.

Tercer ejemplo. — *En la parábola*

$$4x^2 - y - 3\sqrt{3}x + 1 = 0,$$

hallar el vértice, el eje, el foco y la directriz.

— Se puede escribir

$$\left(2x - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 = y + \frac{11}{16}$$

$$\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(y + \frac{11}{16}\right)$$

que es de la forma $X^2 = 2pY$, y, por tanto, es una parábola de eje vertical y girada hacia arriba.

El eje de esta parábola es la recta vertical $x = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

El vértice tiene por coordenadas

$$x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{e} \quad y_0 = -\frac{11}{16},$$

y el parámetro viene dado por $2p = \dfrac{1}{4}$ o $p = \dfrac{1}{8}$.

$$y = -\frac{11}{16} - \frac{p}{2} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

La ordenada del foco es

$$-\frac{11}{16} + \frac{p}{2} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$$

y la directriz tiene por ecuación

$$y = -\frac{11}{16} - \frac{p}{2} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

102. Ecuación general de la tangente a una cónica. — Consideremos la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Ex + F = 0. \tag{1}$$

La ecuación de la tangente en el punto (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0) = -\frac{By_0 + 2Cx_0 + E}{2Ay_0 + Bx_0 + D}(x - x_0) \tag{2}$$

o bien

$$(y - y_0)(2Ay_0 + Bx_0 + D) + (x - x_0)(2Cx_0 + By_0 + E) = 0$$

$$2Ayy_0 + Byx_0 + Dy - 2Ay_0^2 - Bx_0y_0 - Dy_0 + 2Cxx_0 + Bxy_0 + Ex - 2Cx_0^2 - Bx_0y_0 - Ex_0 = 0,$$

que se puede expresar

$$2Ayy_0 + B(yx_0 + xy_0) + 2Cx_0x + Dy + Ex - (2Ay_0^2 + 2Bx_0y_0 + 2Cx_0^2 + 2Dy_0 + 2Ex_0 + 2F) + Dy_0 + Ex_0 + 2F = 0.$$

Luego, encontrándose el punto (x_0, y_0) en la cónica, el paréntesis mayor se anula según la ecuación (1), resultando

$$2Ayy_0 + B(yx_0 + xy_0) + 2Cxx_0 + D(y + y_0) + E(x + x_0) + 2F = 0,$$

que se expresará en la forma $y = mx + p$, y que representa la ecuación buscada de la tangente.

Ejemplo. — Hallar la ecuación de la tangente cónica

$$2y^2 + 3xy + x^2 + 2y - 3x - 1 = 0.$$

en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

— Calculemos y_0. Se tiene

$$2y_0^2 + 3 \cdot 1 \cdot y_0 + 1 + 2y_0 - 3 - 1 = 0$$

$$2y_0^2 + 5y_0 - 3 = 0$$

de donde

$$y_0 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = -3 \text{ y } +\frac{1}{2}.$$

Hagamos, por ejemplo, $y_0 = -3$, de donde la tangente

$$2 \cdot 2y(-3) + 3(y - 3x) + 2x + 2(y - 3) - 3(x + 1) - 2 = 0$$

o bien

$$7y + 10x + 11 = 0.$$

En realidad, es más sencillo aplicar la ecuación (2).

103. La parábola es el límite de una elipse. — Si en una elipse el eje mayor aumenta indefinidamente, permaneciendo fijos uno de sus focos y el vértice próximo a éste, la curva de la elipse tiende hacia una parábola.

Aunque esto ha quedado demostrado ya en el párrafo 92, vamos a hacerlo ahora de manera diferente.

Siendo los ejes O_1x y O_1y, la ecuación de la elipse es (fig. 89):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Pero si se toma O como origen, basta sustituir x por $-a + x$, sin que cambie y:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o bien

$$b^2(x^2 + a^2 - 2ax) + a^2y^2 = a^2b^2$$

de donde

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2). \tag{2}$$

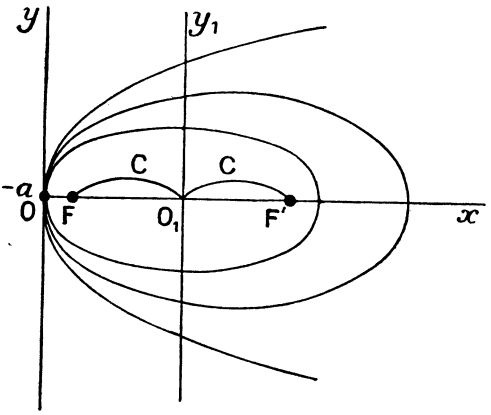

FIG. 89

Se tiene, pues:

$$OF = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{p}{2}$$

de donde

$$\frac{p^2}{2} - a = -\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\left(\frac{p}{2} - a\right)^2 = a^2 - b^2$$

y

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{p}{2} - a\right)^2 = pa - \frac{p^2}{4}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2), obtenemos:

$$y^2 = \frac{pa - \frac{p^2}{4}}{a^2}(2ax - x^2) = \left(p - \frac{p^2}{4a}\right)\left(2x - \frac{x^2}{a}\right).$$

Vemos, por lo tanto, que si el foco F' se aleja indefinidamente, a tiende a infinito, resultando:

$$y^2 = 2px$$

que es la ecuación de una parábola.

CAPITULO X

ENVOLVENTES Y EVOLUTAS

104. Definición y determinación de la curva envolvente. — Consideremos la función implícita $f(x, y, a) = 0$ que representa una familia de curvas dependientes de un parámetro a. A cada valor del parámetro a corresponde una curva y sólo una, y haciendo variar a se obtienen curvas C_1, C_2, C_3 ... que varían en magnitud y posición (fig. 90).

Cuando a a se le han dado todos los valores posibles, se observa que las curvas de la familia no cubren por lo general más que una parte del plano, y que existe una línea de separación E a la que todas las curvas de la familia son tangentes, e incluso están situadas del mismo lado de ella. Esta curva E recibe el nombre de *envolvente* de la familia C *.

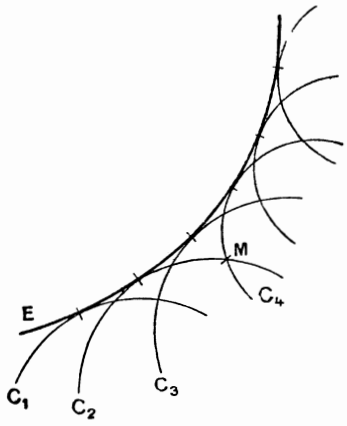

FIG. 90

Por otra parte, si se considera el punto de intersección M de dos curvas próximas, se observa que, a medida que ambas curvas se aproximan entre sí, el punto M se acerca al E, del cual queda infinitamente próximo.

— Entonces, para hallar la ecuación de la curva envolvente E, bastará determinar el lugar geométrico de los puntos comunes a las dos curvas próximas, cuando éstas tienden una a otra.

— Para ello consideremos la curva

$$f(x, y, a) = 0$$

* *N. del T.* A las líneas C se les llama involutas.

y su contigua, en donde a ha variado Δa,

$$f(x, y, a + \Delta a) = 0.$$

Evidentemente, las coordenadas de los puntos de intersección son las raíces comunes a ambas ecuaciones.

— La segunda ecuación puede sustituirse por la

$$f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a) = 0.$$

ya que restamos de ella una cantidad nula. También podemos dividir esta expresión por Δa, ya que es distinto de cero

$$\frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0.$$

Si hacemos tender Δa a cero, ambas curvas tienden a confundirse, y, en el límite, la ecuación última se transforma en la derivada de la función *con relación a la constante a*

$$f_a'(x, y, a) = 0.$$

— De lo anterior se deduce que para hallar la ecuación de la curva envolvente E, basta eliminar a entre las dos ecuaciones

$$f(x, y, a) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_a'(x, y, a) = 0.$$

También se ve que la curva envolvente E es tangente a todas las curvas de la familia $f(x, y, a) = 0$.

Problema inverso. — Si se tuvieran dos parámetros variables en lugar de uno solo

$$f(x, y, a, b) = 0, \tag{1}$$

se podría proponer hallar la relación que debería existir entre a y b para que la curva envolvente tuviera una forma prefijada

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Para encontrar dicha relación entre a y b, se calcula $\frac{dy}{dx}$ en cada una de estas ecuaciones, se igualan estos valores, y eliminando x e y entre las tres ecuaciones se obtendría la relación buscada.

Ejemplos.

1.° *Hallar la envolvente de las rectas dadas por la ecuación*

$$y = ax + \frac{p}{2a} = f(x, a) \tag{1}$$

en donde a es el parámetro variable.

— Derivemos la ecuación (1) con relación a a y anulémosla

$$y_a' = x - \frac{p}{2a^2} = 0 \qquad (2)$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$y = \sqrt{\frac{p}{2x}} \cdot x + \frac{p}{2\sqrt{\frac{p}{2x}}} = \sqrt{\frac{px}{2}} + \sqrt{\frac{px}{2}} = 2\sqrt{\frac{px}{2}}$$

o bien

$$y^2 = 2px,$$

luego la envolvente es una parábola.

2.° *Hallar la envolvente de las rectas tales que* (fig. 91)

$$OA \cdot OB = K^2$$

en donde K^2 *es una constante.*

— Consideremos la ecuación de la recta en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

o bien

$$bx + ay - ab = 0. \qquad (1)$$

Pero aquí existen dos parámetros a y b; eliminemos b, ya que

$$a \cdot b = K^2, \text{ de donde } b = \frac{K^2}{a}$$

y sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene

$$\frac{K^2}{a}x + ay - K^2 = 0$$

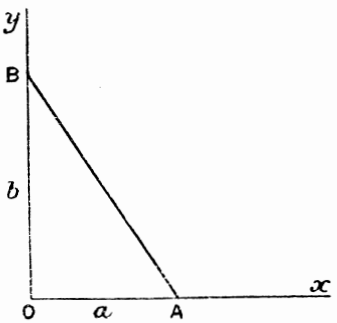

FIG. 91

o bien

$$a^2y - aK^2 + K^2x = 0. \qquad (2)$$

Derivemos con relación a a y anulemos la derivada

$$2ay - K^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad a = \frac{K^2}{2y},$$

y sustituyendo en la ecuación (2):

$$\frac{K^4}{4y^4}y - \frac{K^2}{2y}K^2 + K^2x = 0$$

$$\frac{K^4}{4y} - \frac{K^2}{2y} + x = 0$$

o sea

$$K^2 - 2K^2 + 4xy = 0$$

$$4xy = K^2$$

$$xy = \frac{K^2}{4},$$

que representa *una hipérbola equilátera.*

3.° *Hallar la envolvente de las rectas* AB (fig. 91), *tales que*

$$OA + OB = \text{constante} = l.$$

— Se tiene $a + b = l$, y la ecuación de la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

se transforma, al eliminar b en la

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{l-a} - 1 = 0$$

o bien

$$(l-a)x + ay - a(l-a) = 0$$

$$a^2 - a(x - y + l) + lx = 0 \qquad (1)$$

que es la ecuación de la familia de curvas.

Derivemos con relación a a, y anulemos:

$$f_a' = 2a - (x - y + l) = 0$$

$$a = \frac{x - y + l}{2} \qquad (2)$$

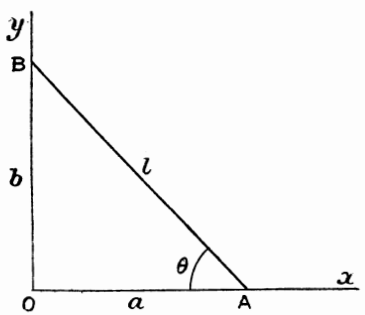

FIG. 92

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$\left(\frac{x-y+l}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y+l}{2}\right)(x-y+l) + lx = 0$$

de donde

$$(x - y + l)^2 - 4lx = 0$$

ecuación en la que a se ha eliminado y que es la ecuación de la envolvente.

4.° *Sea una recta* AB, *de longitud constante l, que desliza a lo largo de los dos ejes. Hallar la envolvente de esa recta* (fig. 92).

— Este es el problema de la escalera situada sobre un muro vertical. Si se hace resbalar el pie de aquélla sobre el plano horizontal, la escalera toma diferentes posiciones en el espacio, de las cuales vamos a calcular su envolvente.

— La ecuación de la recta es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

por otra parte

$$a^2 + b^2 = l^2.$$

Expresemos a y b en función de un solo parámetro, el ángulo θ, haciendo

$$a = l \cos \theta$$
$$b = l \operatorname{sen} \theta;$$

la ecuación de la recta se transforma en la

$$\frac{x}{l \cos \theta} + \frac{y}{l \operatorname{sen} \theta} - 1 = 0$$

o bien

$$\frac{x}{\cos \theta} + \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} = l. \qquad (1)$$

Anulemos la derivada en relación a θ:

$$\frac{x \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{y \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 0$$
$$x \cdot \operatorname{sen}^3 \theta - y \cdot \cos^3 \theta = 0$$

y

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}.$$

Calculemos *sen* θ y *cos* θ

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}}} = \frac{y^{1/3}}{\sqrt{x^{2/3} + y^{2/3}}} = \frac{y^{1/3}}{D}$$

$$\cos \theta = \frac{x^{1/3}}{\sqrt{x^{2/3} + y^{2/3}}} = \frac{x^{1/3}}{D}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$\frac{x \cdot D}{x^{1/3}} + \frac{yD}{y^{1/3}} = l$$

o bien

$$D(x^{2/3} + y^{2/3}) = l$$

de donde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

que es la ecuación de la envolvente y es una *hipocicloide*. Si se opera de forma análoga en los cuatro cuadrantes, se obtiene la figura 93 o curva *astroide* (as de picas).

5.° *Qué relación debe existir entre los parámetros a y b de la recta*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

para que la envolvente sea el círculo

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

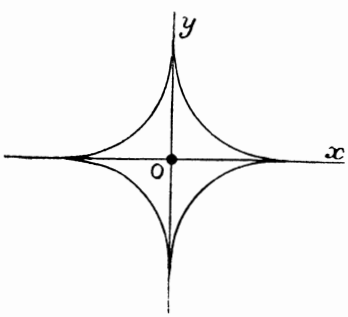

FIG. 93

— Derivemos ambas ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

de donde

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y} \quad \text{y} \quad x = y\frac{b}{a}.$$

Al eliminar x e y entre esta ecuación y las dos primeras, se obtiene fácilmente

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2}$$

6.° *Sea la parábola* $y^2 = 2px$ (fig. 94) *y un punto* M *que se desplaza sobre ella. Se traza el círculo de centro* M *y de radio siempre igual a la distancia de* M *al vértice de la parábola. Hallar la envolvente de estos círculos cuando* M *describe la parábola.*

— Si x_0 e y_0 son las coordenadas del punto M, se verifica $y_0^2 = 2px_0$. La ecuación del círculo de centro M es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

siendo

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

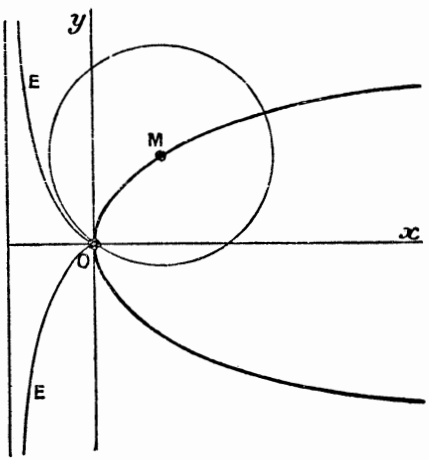

FIG. 94

Desarrollando

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - (x_0^2 + y_0^2) = 0$$

o bien

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = 0. \qquad (1)$$

Eliminando x_0, se tiene:

$$x_0 = \frac{y_0^2}{2p},$$

sustituyendo en la ecuación (1):

$$x^2 + y^2 - 2x \cdot \frac{y_0^2}{2p} - 2yy_0 = 0$$

o sea

$$p(x^2 + y^2) - xy_0^2 - 2pyy_0 = 0. \qquad (2)$$

Sólo hay un solo parámetro, y_0; anulemos, por tanto, la derivada con relación a y_0

$$f'_{y_0} = -2xy_0 - 2py = 0$$

de donde

$$y_0 = -\frac{py}{x}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2):

$$p(x^2 + y^2) - x\left(\frac{p^2y^2}{x^2}\right) - 2py\left(-\frac{py}{x}\right) = 0$$

$$(x^2 + y^2) + \frac{py^2}{x} = 0,$$

o por último

$$x(x^2 + y^2) + py^2 = 0,$$

que es la ecuación de la curva envolvente, que es una *cisoide* E.

7.° *Hallar la envolvente de la recta*

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

en donde m es un parámetro.

—Se tiene

$$y'_m = x + \frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} = 0$$

de donde

$$x = -\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}$$

e

$$y = -\frac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} + \sqrt{a^2m^2 + b^2} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}.$$

Eliminando m, se obtiene

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2m}{b^2}, \quad \text{de donde} \quad m = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Sustituyendo en y, y elevando al cuadrado

$$y^2 = \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}\right) = \frac{b^4}{a^2\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2} + b^2} = \frac{a^2b^2y^2}{b^2x^2 + a^2y^2}$$

o bien

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

y al dividir por a^2b^2, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es una elipse.

— Puede observarse también que la recta de pendiente m

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

es tangente a dicha elipse.

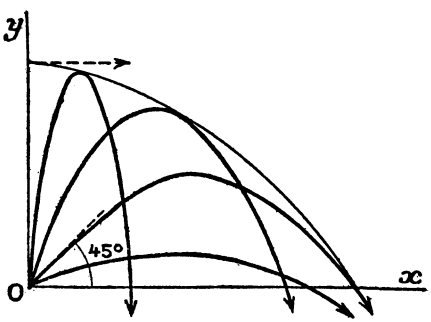

FIG. 95

8.° *Se lanza un proyectil con una velocidad inicial* V_0 *y ángulo* α. *Se sabe que la trayectoria descrita es una parábola* (fig. 95) *cuando se desprecia la resistencia del aire. Haciendo variar el ángulo* α *a* $\frac{\pi}{2}$, *las parábolas descritas cambian de posición y se pide hallar la envolvente de ellas.*

En el tomo V hemos demostrado (Ecuaciones diferenciales, § 49), que la ecuación de la traeyctoria es

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + x\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (1)$$

que representa un trinomio, que pasa por un máximo.

Anulemos la derivada con relación a α:

$$-\frac{gx^2}{2V_0^2}(-2)(\cos\alpha)^{-3}(-\operatorname{sen}\alpha) + \frac{x}{\cos^2\alpha} = 0$$

o bien

$$\frac{gx^2}{V_0^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha = x$$

y

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_0^2}{gx},$$

de donde

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{V_0^4}{g^2x^2}}} = \frac{gx}{\sqrt{g^2x^2 + V_0^4}}.$$

Sustituyendo en la ecuación (1), para eliminar α,

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2} \cdot \frac{g^2x^2 + V_0^4}{g^2x^2} + \frac{xV_0^2}{gx}$$

$$= -\frac{g^2x^2 + V_0^4}{2V_0^2g} + \frac{V_0^2}{g}$$

o sea

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$

que es la curva envolvente indicada en la figura 95, y es una parábola.

EVOLUTAS

105. Definición. — *Se llama evoluta de una curva* C, *al lugar geométrico de los centros de curvatura.*

En la figura 96, es el lugar de los puntos ABDEF. Llamemos K a ese lugar geométrico.

Inversamente, se dice que la curva C es la *evolvente* de la curva K (fig. 96), siendo cada radio vector, entonces, tangente a la evoluta.

— Hemos estudiado en el tomo II la curvatura de las curvas y hemos calculado las fórmulas que dan las coordenadas de x_c e y_c del centro de curvatura.

Entonces, es necesario hallar la ecuación de la normal a la curva C. *La envolvente de estas normales es la evoluta.* Hallando la derivada con relación al parámetro, anulándola y eliminando ese parámetro con la ecuación de la curva C, se obtiene la ecuación de la envolvente.

—Puede operarse de forma diferente gracias a las fórmulas que proporcionan las coordenadas x_c e y_c del centro de curvatura. En efecto, el centro de curvatura se encuentra sobre la evoluta y sus coordenadas vienen dadas en función de las x e y de un punto de la curva, siendo y función de x.

De lo anterior se deduce que, las dos ecuaciones que dan x_c e y_c son las ecuaciones paramétricas de la evoluta en función de x.

Para hallar la ecuación de la evoluta en coordenadas cartesianas, basta eliminar x entre las dos fórmulas de x_c e y_c, no existiendo método general para ello, ya que depende todo de la forma de las ecuaciones.

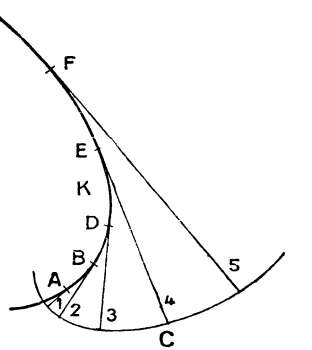

FIG. 96

—*La manera de operar es la siguiente:*

1.° *se calcula* x_c *e* y_c *por medio de las derivadas* y' *e* y'',

2.° *se determina la expresión de las coordenadas* x *e* y *de un punto de la curva* C *en función de* x_c *e* y_c,

3.° *se sustituyen los valores de* x *e* y *en la ecuación de la curva* C, *y así obtenemos una relación entre* x_c *e* y_c, *que es la ecuación de la evoluta.*

—*A título de ejercicio,* emplearemos los dos métodos: el anterior y el indicado al principio, que consiste en hallar la envolvente de las normales.

106. Ejemplos:

1.° *Envolvente de la parábola*

$$y^2 - 2px = 0. \tag{1}$$

—*Primer método por los centros de curvatura.* Tomemos las derivadas

$$y_x' = \frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{-2p}{2y} = \frac{p}{y}$$

$$y_x'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p}{y^2}\cdot\frac{p}{y} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Las coordenadas del centro de curvatura de esta parábola se han calculado ya en el tomo II, § 104, siendo

$$\left|\begin{array}{l} x_c = 3x + p \\ y_c = -\dfrac{y^3}{p^2}, \end{array}\right.$$

de donde se deduce

$$\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{x_c - p}{3} \\ y = \sqrt[3]{-p^2 y_c}. \end{array}\right.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (1), se obtiene:

$$(-p^2 y_c)^{2/3} = 2p\left(\frac{x_c - p}{3}\right)$$

que al suprimir los subíndices para obtener la ecuación general de la evoluta, resulta

$$py^2 = \frac{8}{27}(x - p)^3$$

que es la curva dibujada en la figura 97.

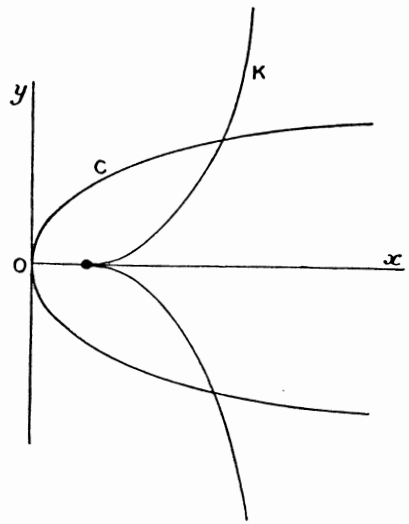

FIG. 97

—*Segundo método, por la envolvente de las normales.* Sea la curva

$$y^2 - 2px = 0,$$

se tiene

$$y' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{-2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

La ecuación de la tangente, que pasa por el punto x_0 e y_0 de la parábola es

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

y la normal

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0).$$

Al sustituir x_0 por su valor $\dfrac{y_0^2}{2p}$, se obtiene

$$p(y - y_0) + y_0\left(x - \frac{y_0^2}{2p}\right) = 0. \qquad (1)$$

Esta ecuación no depende más que de y_0, y por tanto la envolvente se obtendrá eliminando y_0 entre la ecuación anterior y su derivada *con relación a esta ordenada*. Anulando la derivada, obtenemos

$$-p + \left(x - \frac{y_0^2}{2p}\right) + y_0\left(-\frac{2y_0}{2p}\right) = 0$$

$$-p + x - \frac{y_0^2}{2p} - \frac{y_0^2}{p} = 0$$

de donde

$$y_0^2 = \frac{2p(x-p)}{3}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1), y escribiéndola en la forma

$$2p^2(y - y_0) + y_0(2px - y_0^2) = 0,$$

se obtiene

$$y_0\left[2px - 2p^2 - \frac{2p}{3}(x-p)\right] + 2p^2y = 0$$

o bien

$$y_0\left[(x-p)\left(2p - \frac{2p}{3}\right)\right] + 2p^2p = 0$$

$$\frac{4}{3}py_0(x-p) + 2p^2y = 0$$

$$\frac{2}{3}y_0(x-p) = -py.$$

Elevando al cuadrado

$$\frac{4}{9}y_0^2(x-p)^2 = p^2y^2$$

y sustituyendo y_0^2 por su valor,

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2p(x-p)}{3}(x-p)^2 = p^2y^2$$

y por último

$$y^2 = \frac{8(x-p)^3}{27p}$$

que es la ecuación de la evoluta. Obsérvese que hemos vuelto a encontrar el mismo valor que en el primer método.

2.° *Evoluta de la elipse:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Primer método, por los centros de curvatura. La elipse se escribe en la forma

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

de donde

$$y_x' = -\frac{2b^2x}{2a^2y} \qquad \text{e} \qquad y_x'' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right),$$

y sustituyendo y' por su valor, se obtiene

$$y_x'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Si se sustituyen estos valores en las coordenadas x_c e y_c del centro de curvatura (ver tomo II):

$$\left|\begin{array}{l} x_c = x - \dfrac{y'}{y''}(1 + y'^2) \\ y_c = y + \dfrac{(1 + y'^2)}{y''}, \end{array}\right.$$

se obtiene

$$\left|\begin{array}{ll} x_c = \dfrac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4}, & \text{de donde} \quad x = \left(\dfrac{a^4x_c}{a^2 - b^2}\right)^{1/3} \\ y_c = -\dfrac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}, & \text{de donde} \quad y = -\left(\dfrac{b^4y_c}{a^2 - b^2}\right)^{1/3}. \end{array}\right.$$

Sustituyendo en la ecuación (1), y quitando denominadores, se encuentra finalmente

$$b^2(a^4x_c)^{2/3} + a^2(b^4y_c)^{2/3} = a^2b^2(a^2 - b^2)^{2/3}$$

o bien

$$(ax_c)^{2/3} + (by_c)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3},$$

que es la curva envolvente, representada por K en la figura 98.

Segundo método, por la envolvente de las normales. La tangente a la elipse en un punto $x_0\,y_0$, tiene por ecuación

$$(y - y_0) = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}(x - x_0)$$

y la normal

$$y - y_0 = \frac{f'_{y_0}}{f'_{x_0}}(x - x_0)$$

$$\frac{y - y_0}{f'_{y_0}} = \frac{x - x_0}{f'_{x_0}}$$

lo que da

$$\frac{y - y_0}{\frac{2y_0}{b^2}} = \frac{x - x_0}{\frac{2x_0}{a^2}}$$

o bien

$$\frac{b^2}{y_0}(y - y_0) = \frac{a^2}{x_0}(x - x_0)$$

$$\frac{b^2 y}{y_0} - \frac{a^2 x}{x_0} + a^2 - b^2 = 0,$$

y al hacer

$$c^2 = a^2 - b^2:$$

$$\frac{b^2 y}{y_0} - \frac{a^2 x}{x_0} + c^2 = 0. \qquad (2)$$

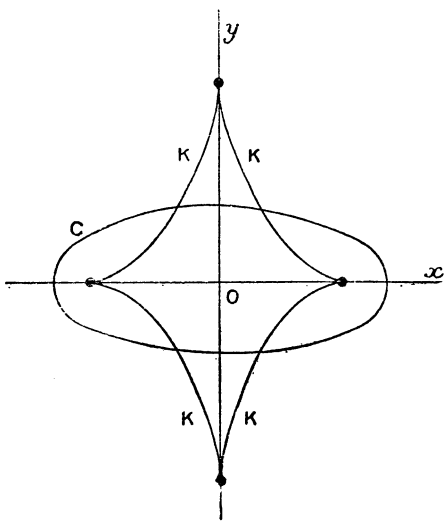

FIG. 98

Para proseguir el cálculo, es más cómodo expresar las coordenadas de la elipse en forma paramétrica (ver más adelante):

$$x_0 = a \cos \theta \qquad y_0 = b \operatorname{sen} \theta,$$

obsérvese que ambos valores satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La ecuación (2) se transforma entonces en la

$$\frac{by}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{ax}{\cos \theta} + c^2 = 0. \tag{3}$$

Derivemos con relación a θ, y anulemos

$$-\frac{by \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{ax}{\cos^2 \theta} \operatorname{sen} \theta = 0$$

o bien

$$-\frac{by}{\operatorname{sen}^3 \theta} = \frac{ax}{\cos^3 \theta}. \tag{4}$$

Ahora, eliminemos θ entre las ecuaciones (3) y (4), y teniendo en cuenta la propiedad siguiente de las proporciones

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{r} = \frac{m+p}{n+r},$$

se obtiene

$$\frac{\dfrac{ax}{\cos \theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{\dfrac{-by}{\operatorname{sen} \theta}}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{c^2}{1}$$

de donde

$$\cos^3 \theta = \frac{ax}{c^2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = -\frac{by}{c^2}. \tag{5}$$

Sustituyendo en la ecuación (3) se obtiene finalmente

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = c^{4/3},$$

que coincide con la ecuación encontrada por el primer método.

Cálculo del área interior de la evoluta a la elipse. A título de ejercicio, calculemos la superficie de esta curva cerrada, cuya ecuación paramétrica viene dada por las ecuaciones (5) anteriores

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 \theta \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{c^2}{b} \operatorname{sen}^3 \theta.$$

Variando θ de 0 a 2π, la superficie es

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\,dy - y\,dx).$$

Se tiene

$$dx = 3\frac{c^2}{a}\cos^2\theta\,(-\operatorname{sen}\theta\,d\theta)$$

$$dy = -3\frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^2\theta\,(\cos\theta\,d\theta),$$

de donde

$$S = \frac{1}{2}\frac{c^4}{ab}\int_0^{2\pi} (3\cos^3\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos\theta - 3\operatorname{sen}^3\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$|S| = \frac{3c^4}{2ab}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\cos^2\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{3c^4}{2ab}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta\cdot d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{8}\frac{c^4}{ab}$$

3.° *Sea la cicloide*

$$y = R(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = R(1 - \cos\theta).$$

Al calcular

$$y_x' = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} \quad \text{e} \quad y_x'' = \frac{x_\theta' y_\theta'' - y_\theta' x_\theta''}{x_\theta'^3}$$

se obtiene

$$y_x' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} \quad \text{e} \quad y_x'' = \frac{-1}{R(1-\cos\theta)^2},$$

y para las coordenadas del centro de curvatura, que en suma constituyen la ecuación de la curva envolvente en coordenadas paramétricas, se encuentra

$$\begin{cases} x_c = R(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ y_c = -R(1-\cos\theta) \end{cases}$$

que representa otra cicloide (fig. 99). Para la expresión general de la ecuación, basta suprimir los subíndices en x e y.

4.° *Sea la curva del as de picas* (fig. 93):

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}.$$

— Se obtiene

$$\begin{cases} x_c = x + 3x^{1/3}y^{2/3} \\ y_c = y + 3x^{2/3}y^{1/3}, \end{cases}$$

y la evoluta es

$$(x_c + y_c)^{2/3} + (x_c - y_c)^{2/3} = 2l^{2/3},$$

pudiéndose suprimir entonces los subíndices de las letras.

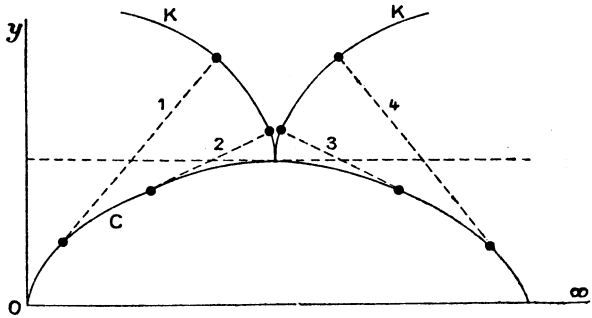

FIG. 99

5.° *Evoluta de la hipérbola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— Haciendo

$$x = a \operatorname{ch} \varphi \qquad \text{e} \qquad y = b \operatorname{sh} \varphi$$

se comprueba que satisfacen a la ecuación de la hipérbola, ya que

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1.$$

El cálculo se realiza de forma análoga a como lo hemos hecho para el caso de la elipse, con parámetros, encontrándose para la ecuación de la envoluta de la hipérbola,

$$(ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = c^{3/4}.$$

CAPITULO XI

ESTUDIO Y TRAZADO DE CURVAS EN COORDENADAS CARTESIANAS

En el tomo I, hemos estudiado y trazado las curvas de algunas funciones sencillas. Vamos ahora a considerar funciones más complicadas, aplicando las teorías expuestas anteriormente sobre tangentes a las curvas, asíntotas, puntos singulares, curvatura, etc.

107. Marcha a seguir para el trazado de la curva de una función $f = f(x)$.

1.° *Condiciones de existencia de la curva.* — Es necesario que la función y sea real: de ella se deducirán los límites de variación de x.

Si se tiene una raíz cuadrada: hay que expresar que la cantidad bajo el radical debe ser positiva.

En el caso de un logaritmo: la magnitud de la que se halla su logaritmo debe ser positiva.

Si se trata de un arco sen o de un arco cos: la magnitud en cuestión deberá estar comprendida entre $+1$ y -1.

Si se tiene una función periódica, de período T: se hará variar el ángulo de 0 a 2π, puesto que la función se repite periódicamente.

En todos los demás casos, x variará de $-\infty$ a $+\infty$.

Se pueden restringir los límites de x por consideraciones sobre simetría, como vamos a ver.

2.° *Simetrías.*

Si cambiando x en $-x$, y no varía, la curva es simétrica con relación al eje vertical Oy. Es el caso de la función

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

en el que no se hará variar x más que de 0 a $+\infty$.

Si, cambiando x en $-x$, y cambia sólo de signo y no de valor, la curva es simétrica con relación al origen O, y x varía de 0 a $+\infty$. Así tendremos la mitad de la curva.

Si, al cambiar y en $-y$, x no varía, la curva es simétrica con relación al eje de las x.

En ciertos casos, podemos comprobar la simetría de la curva mediante un cambio de ejes; así, la curva

$$y = 2x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

se puede expresar, trasladando el origen al punto (0,3):

$$Y + 3 = 2X + 3 + \frac{X}{X^2 - 1}$$

o sea

$$Y = 2X + \frac{X}{X^2 - 1}$$

que es simétrica con relación al origen, ya que

$$f(X, Y) = f(-X, -Y).$$

Asimismo, la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

es simétrica con relación a los ejes x y de las y, y también respecto al origen.

Por último, una curva es simétrica con relación a la primera bisectriz, si al cambiar x en y e y en x, no varía la ecuación; es el caso de la curva

$$(x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2y^2 = 0$$

y, por último, existe simetría con relación a la segunda bisectriz, si cambiando x en $-y$ e y en $-x$, no varía la ecuación, que es, igualmente, el caso de la curva anterior.

3.° *Valores particulares.* — No obstante lo que se acaba de exponer, se hará

$x = 0$, y se obtiene y,
$x = \pm\infty$, y se obtiene y,
$y = 0$, y se deduce x.
$y = \infty$, y se deduce x,

4.° *Se determinan las asíntotas paralelas y oblicuas a los ejes.*

5.° *Se calcula y', intentando anularla.*

6.° *Se estudian los signos de y' y de ellos se deducen los máximos y mínimos de y.*

7.° *Se calcula y'' y se deducen los puntos de inflexión y los sentidos de la concavidad.*

8.° *Se calculan las tangentes en los puntos notables: por ejemplo, para* $x = 0$ *y* $x = \pm \infty$.

9.° *Se traza una tabla horizontal, a la que se llevan todos los valores hallados (tres líneas para x, y' e y).*

10.° *Se traza la curva,* teniendo en cuenta la última línea de la tabla. *En este momento,* basándose en el crecimiento de y, se pueden poner los signos + o — a los símbolos ∞, cuando y se hace infinito.

Observaciones. — Se recordará que

$y = ax^2 + bx + c$ representa siempre una parábola de eje vertical,

$y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ representa siempre una hipérbola cuyas asíntotas son paralelas a los dos ejes,

$y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ representa siempre la expresión de una hipérbola, en la que una de las asíntotas es paralela a Oy, siendo oblicua la otra.

$y = ax + b \pm \sqrt{nx^2 + px + r}$ es:

una elipse si $n < 0$
una hipérbola si $n > 0$
una parábola si $n = 0$

} (salvo excepción).

Las curvas, en fin, con un exponencial que presente una discontinuidad para el valor de x que hace infinito el exponente, si éste cambia debia de signo. Esto es así porque $e^{-\infty} = 0$ y $e^{+\infty} = +\infty$.

108. Ejemplos. —

El estudio que hemos dedicado a las funciones sencillas en el tomo I de este curso, lo proseguimos ahora sobre otras más complejas.

1.° *Ejemplo.* — Sea la curva

$$y = x^x. \tag{1}$$

— Esta sólo está definida para $x > 0$, ya que

$$\log y = x \cdot \log x, \tag{2}$$

y únicamente los números positivos tienen logaritmo.

Para $x = +\infty$, y $= +\infty$.

Para $x = 0$, tenemos

$$\log y = 0 \cdot \log 0 = 0\,(-\infty) = \text{indeterminación},$$

pero, se puede escribir

$$\log y = \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

y la regla de L'HÔPITAL da

$$\log y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$$

de donde

$$y = e^0 = 1.$$

Calculemos la derivada de y derivando la ecuación (2)

$$\frac{1}{y}y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$y' = x^x (\log x + 1) = 0$$

de donde

$$\log x = -1 \qquad \text{y} \qquad x = x = e^{-1} = 0{,}37.$$

Para $x < 0{,}37$, $y' < 0$ e $y \searrow$,

para $x > 0{,}37$, el log de x es, evidentemente, mayor que -1 e $y' > 0$, por tanto $y \nearrow$.

Se tendrá un mínimo de y para $x = 0{,}37$.

Para $x = +\infty$, $y' = \infty$, la curva es vertical.

Para $x = 0$, se ha visto que el verdadero valor de x^x es 1, e

$$y' = 1\,(\log 0 + 1) = -\infty.$$

Así se obtienen la tabla y la curva (fig. 100).

x	0		0,37		1		$+\infty$
y'	$-\infty$	—	0	+		+	$+\infty$
y	1	↘	0,7	↗	1	↗	$+\infty$

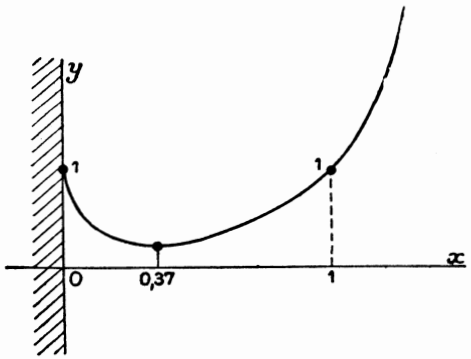

FIG. 100

2.° *Eejemplo.* — Trazar la curva

$$y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x. \tag{1}$$

— Tenemos

$$\log y = x \cdot \log \left(\frac{x}{x-1}\right)^x, \tag{2}$$

cuya función y sólo es real si

$$\frac{x}{x-1} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} > 0$$

de donde

$$x^2 - x > 0,$$

trinomio cuyas raíces son 0 y 1, y que será positivo para valores de x fuera de las raíces $x < 0$ ó $x > 1$.

Consideremos algunos valores:

$$\text{para} \quad x = \infty, \quad y = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \text{indeterminación}$$

pero se puede escribir

$$y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x$$

$$\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \left(1 + \frac{m}{1}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$$

cuyo límite para $x = \infty$ es

$$y = e \cdot 1 = e.$$

Para $x = 1$, $y = \infty$,
Para $x = 2$, $y = 4$,
Para $x = 0$, y queda indeterminada, pero se tiene:

$$\log y = x \cdot \log \frac{x}{x-1} = \frac{\log \left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\log 0}{\infty} = \frac{-\infty}{\infty} = ?,$$

de donde

$$\frac{N'}{D'} = \frac{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x(x-1)}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

luego

$$\log y = 0 \quad \text{e} \quad y = e^0 = 1.$$

— Calculemos y' derivando la ecuación (2):

$$\frac{1}{y} y' = \mathrm{L} \frac{x}{x-1} + x \left[\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right] = \mathrm{L} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

de donde

$$y' = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x \left[\log \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right]$$

al no poderse anular el corchete (salvo para $x = \pm \infty$), no existe máximo ni mínimo.

Estudiemos el signo de y'. El paréntesis delante del corchete es siempre positivo, ya sea $x > 1$ o < 0;

Estudiemos ahora el signo del corchete; se tiene, desarrollando el logaritmo en serie de MAC-LAURIN,

$$-\frac{1}{x-1} + \log\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{x-1} + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} \cdots\right].$$

Para $x > 1$, toda la expresión es negativa, e y decrece.

Para $x < 0$, ocurre lo mismo.

Por último, para $x = 0$ y para $x = 1$, $y' = \infty$, y la curva será tangente al eje de las y.

Así se obtienen la tabla siguiente, y la curva de la figura 101.

x	$-\infty$		0		$+1$		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$		$-\infty$	$-$	
y	e	↘	1		$+\infty$	↘	e

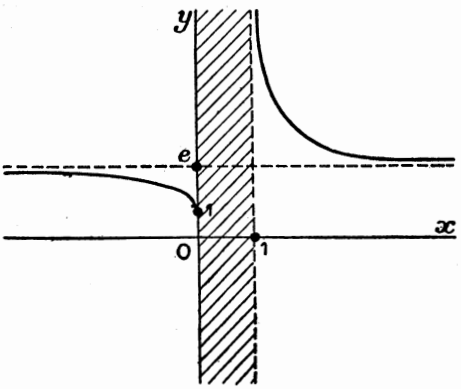

FIG. 101

3.° *Ejemplo.* — Trazar la curva

$$x^3 + x^2 - 4y^2 + 0.$$

— Puede escribirse

$$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^3 + x^2}$$

resultando que el eje de las x es un eje de simetría, y tomaremos el signo + para estudiar la función.

Por otra parte, dicha función no está definida más que si

$$x^2(x + 1) > 0$$

y será necesario, por último, tener $x > -1$ para que y sea real.

Anulemos la derivada:

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{x^3 + x^2}}(3x^2 + 2x) = 0$$

lo que nos da $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 0$. Pero, para este último valor tenemos $y' = \frac{0}{0}$. En cualquier caso, y' es negativa entre 0 y $-\frac{2}{3}$ y positivo fuera de las raíces. Busquemos, pues, el valor de la derivada para $x = 0 - \varepsilon$ y para $x = 0 + \varepsilon$, y hallemos la pendiente $\frac{y}{x}$ de la tangente de la curva:

1.° Si x es negativo, se tiene

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^3 + x^2}}{x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{x + 1}$$

cuyo límite es $-\frac{1}{2}$.

2.° Si x es positivo, se tendría $+\frac{1}{2}$.

Existe, por consiguiente, *un punto doble* para $x = 0$, ya que hay dos tangentes a la curva.

Consideremos algunos puntos particulares:

para $x = 0$, $y = 0$
para $x = -1$, $y = 0$
para $x = +\infty$, $y = +\infty$.

Así se obtiene la tabla siguiente

y	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\mp 1/2$	$+$	$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{27}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

que nos da la curva de la figura 102.

Tomando el signo — delante de y, se obtiene la curva punteada.

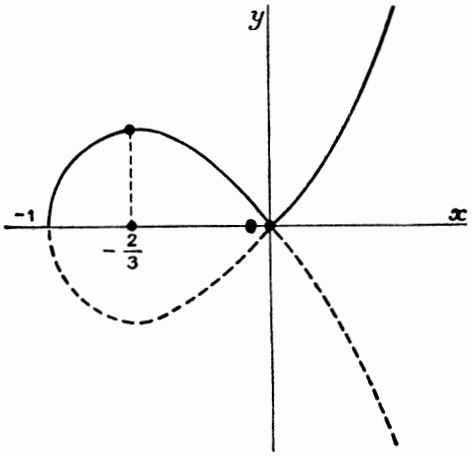

FIG. 102

4.° *Ejemplo:*

$$y = x\sqrt{\frac{4x-8}{9x-27}}.$$

— Para que la curva sea real, es necesario que

$$\frac{4x-8}{9x-27} > 0 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{(4x-8)(9x-27)}{(9x-27)^2} > 0,$$

cuyo numerador se anula para $x = +2$ y $x = +3$; es un trinomio

que pasa por un mínimo, y será positivo para x fuera de las raíces

$$x < 2 \qquad \text{o bien} \qquad x > 3.$$

Para $x = 0$, $y = 0$, la curva pasa por el origen.

Para hallar las tangentes en el origen, establezcamos la relación $\frac{y}{x}$ para $x = 0$, que nos da la pendiente m:

$$m = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{4x-8}{9x-27}} = \sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{24}{81}} = \backsim \pm \frac{5}{9}.$$

Asíntotas: $y = \infty$ para

$$9x - 27 = 0 \qquad \text{de donde} \qquad x = +3.$$

que es la abscisa de la asíntota vertical.

Para la asíntota oblicua $y = mx + p$, calculemos la relación $\frac{y}{x}$ para $x = \infty$; repitiendo el cálculo anterior se obtiene

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

y dividiendo la cantidad subradical por x, nos queda $\pm \frac{2}{3}$.

Se tienen, pues, dos asíntotas oblicuas y simétricas con relación al eje de las x.

— Calculemos las ordenadas en el origen, tomando el valor de $+\frac{2}{3}$:

$$p = \lim \left(y - \frac{2}{3}x\right) = x\sqrt{\frac{4x-8}{9x-27}} - \frac{2}{3}x$$

$$= x\left[\frac{3\sqrt{4x-8} - 2\sqrt{9x-27}}{3\sqrt{9x-27}}\right] = \infty - \infty.$$

Multipliquemos y dividamos por la conjugada del numerador:

$$p = x\,\frac{[3\sqrt{4x-8} - 2\sqrt{9x-27}][3\sqrt{4x-8} + 2\sqrt{9x-27}]}{3\sqrt{9x-27}[3\sqrt{4x-8} + 2\sqrt{9x-27}]}$$

$$= x\,\frac{9(4x-8) - 4(9x-27)}{D} = \frac{36x}{D}$$

$$= \frac{36}{3\sqrt{\frac{9x-27}{x}}\left[3\sqrt{\frac{4x-8}{x}} + 2\sqrt{\frac{9x-27}{x}}\right]},$$

y para $x = \infty$:

$$p = \frac{36}{3 \cdot 3[3 \cdot 2 + 2 \cdot 3]} = \frac{1}{3}.$$

Para el valor $-\frac{2}{3}$ se encontraría $p = -\frac{1}{3}$.

Las dos asíntotas oblicuas son entonces

$$y = \pm \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right).$$

Calculemos ahora la derivada:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{4x^3 - 8x^2}{9x - 27}}} \cdot \frac{(9x - 27)(12x^2 - 16x) - (4x^3 - 8x^2)9}{(9x - 27)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x - 8}} \cdot \frac{36(2x^2 - 11x + 12)}{\sqrt{9x - 27}(9x - 27)} = 0$$

el numerador se anula para $x = 4$ y $x = \frac{3}{2}$, y la derivada tiene el signo del trinomio del numerador: es positiva fuera de las raíces. De ello se deducen (ver la tabla) las regiones en que y crece y decrece, observándose que

y es mínimo para $x = 4$ e $y = \pm \frac{8\sqrt{2}}{3}$,

y es máximo para $x = \frac{3}{2}$ e $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Obtenemos así la tabla, y la curva $aOb2cd$:

x	$\overline{-\infty}$		0		$\frac{3}{2}$		2		3		4		$\overset{+}{\infty}$
y'	$\frac{2}{3}$	+	$+\frac{5}{9}$	+	0	—	$\overline{\infty}$		$\overset{+}{\infty}$	—	0	+	$\frac{2}{3}$
y	$\overline{-\infty}$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0		$\overset{+}{\infty}$	↘	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$	↗	$\overset{+}{\infty}$

Tomando el doble signo ± delante del radical de y se obtiene una curva exactamente simétrica de la primera, lo que da la curva de la figura 103.

5.° *Ejemplo.* — Sea la curva

$$y^2 = \frac{9x^2(2x + a)^2(x + a)}{2a^4}, \qquad (1)$$

en la que a es un número positivo.

— Se tiene

$$y = \pm \frac{3x(2x + a)\sqrt{x(x + a)}}{a^2\sqrt{2}},$$

correspondiendo a cada valor de x dos valores iguales y de signos contrarios, por lo que basta estudiar las variaciones del valor positivo:

	para $x = 0$	$y = 0$,
	para $x = -a$	$y = 0$,
y	para $x = -\frac{a}{2}$	$y = 0$.

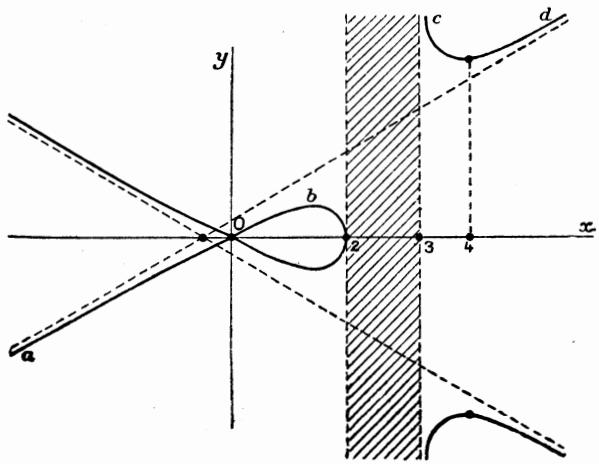

FIG. 103

Es necesario, en fin, que $x(x + a)$ sea positivo:

$$x^2 + ax > 0,$$

trinomio que se anula para $x = 0$ y $x = -a$, y que es positivo fuera de las raíces; debe verificarse que

$$x < -a \quad \text{o bien} \quad x > 0.$$

Para calcular y' derivemos la ecuación (1)

$$2yy' = \frac{9}{2a^4}[3x^2(2x+a)^2(x+a) + 4x^3(2x+a)(x+a) + x^2(2x+a)^2]$$

$$= \frac{9}{2a^4}x^2(2x+a)[3(2x+a)(x+a) + 4x(x+a) + x(2x+a)]$$

$$= \frac{9}{2a^4}x^2(2x+a)(12x^2 + 14ax + 3a^2).$$

Despejando y':

$$y' = \frac{9}{2a^4} \cdot \frac{x^2(2x+a)(12x^2+14ax+3a^2)a^2\sqrt{2}}{6x(2x+a)\sqrt{x}\sqrt{x+a}}.$$

y anulándola

$$y' = \frac{3\sqrt{x}}{2a^2\sqrt{2}} \cdot \frac{12x^2+14ax+3a^2}{\sqrt{x+a}} = 0$$

obtenemos

$$x = 0$$

y

$$12x^2 + 14ax + 3a^2 = 0$$

cuyas raíces están comprendidas justamente en el intervalo 0 y $-a$, en donde y es imaginaria, y siendo positiva la derivada fuera de las raíces, la función es creciente fuera del intervalo $-a$ y 0. En el punto O, y' es nula, y como existen dos ramas de curvas, habrá *un punto de revolución.*

Para $x = -a$, $y' = \infty$, la curva es vertical.

Para $x = \pm\infty$, $y' = \infty$, la curva es vertical.

Sin que sea necesario hacer la tabla, se obtiene inmediatamente la curva de la figura 104.

6.° *Ejemplo.* — Trazar la curva

$$y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

— Admitiendo que se puede calcular la raíz cúbica de un número negativo, se puede hacer variar x de $-\infty$ a $+\infty$.

Para $x = 0$, $y = 1$, y para $x = +1$, $y = 0$.
Para $x = -\infty$, $y = +\infty$, y para $x = \infty$, $y = -\infty$.

Tenemos

$$y = (1 - x^3)^{1/3}$$

e

$$y' = \frac{1}{3}(1 - x^3)^{-1/3}(-3x^2) = \frac{-x^2}{(1 - x^3)^{2/3}}$$

derivada que es nula para $x = 0$, e infinito para $x = +1$.

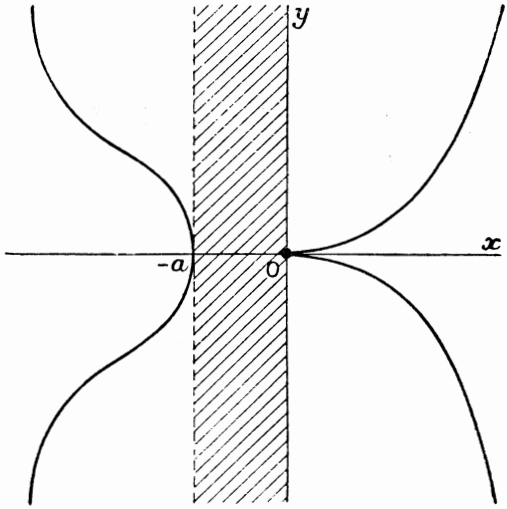

FIG. 104

La derivada es siempre negativa e y decrece continuamente. Podemos escribir

$$y = -x\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{1/3},$$

y desarrollando el paréntesis en serie de MAC-LAURIN, se obtiene

$$y = -x + \frac{1}{3x^2} + \ldots$$

La pendiente de la asíntota oblicua es

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = -1,$$

y su ordenada en el origen

$$p = \lim (y - mx) = 0.$$

Se obtiene así la tabla siguiente

y'	$-\infty$		0		$+1$		$+\infty$
y		$-$	0	$-$	∞	$-$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

que nos da la curva de la figura 105.

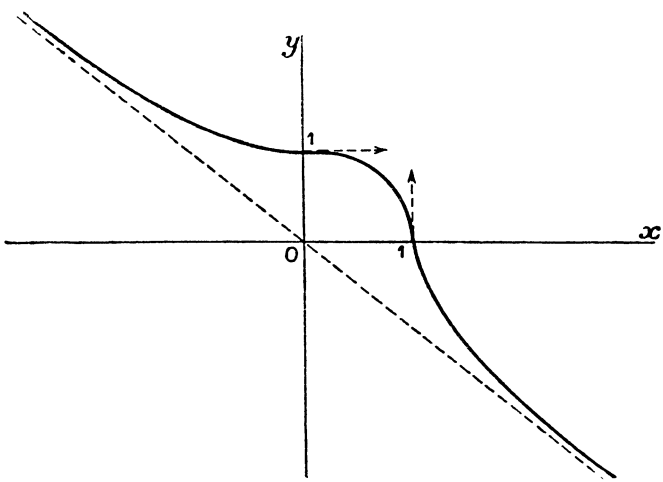

FIG. 105

7.° *Ejemplo.* — Sea la curva (llamada *curva del diablo*).

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0. \qquad (1)$$

— Aunque esta ecuación tenga la forma $f(x, y) = 0$, podemos calcular y en función de x.

Vemos que:

1.° para $x = 0$, $y = 0$, la curva pasa por el origen:

2.° el origen es un punto doble, puesto que el conjunto de los términos de grado menor es de 2.° grado;

3.° las tangentes en el origen se obtienen anulando los términos de grado menor

$$-96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0$$

o bien

$$24y^2 - 25x^2 = 0$$

$$y = \pm \frac{5x}{\sqrt{24}}.$$

4.° existe simetría con relación al eje de las x y de las y;

5.° las direcciones asintóticas vienen dadas por

$$y^4 - x^4 = 0$$

o bien

$$(y^2 + x^2)(y - x)(y + x) = 0$$

de donde

$$y = \pm x.$$

No habiendo términos de tercer grado, las asíntotas pasan por el origen, no existiendo, por tanto, ordenadas en dicho punto.

Calculemos y':

$$y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{200a^2x - 4x^3}{4y^3 - 192a^2y} = -\frac{4x(50a^2 - x^2)}{4y(y^2 - 48a^2)}$$

$y' = 0$ para $x = 0$ y $x = \pm a\sqrt{50} = \pm 5a\sqrt{2}$,

$y' = \infty$ para $y = 0$ e $y = \pm a\sqrt{48} = \pm 4a\sqrt{3}$.

Los valores correspondientes para la ecuación son

para $x = 0$, $\quad y^4 - 96a^2y^2 = 0$, de donde $\begin{matrix} \nearrow y = 0 \\ \searrow y = \pm 4a\sqrt{6} \end{matrix}$

para $x = \pm 5a\sqrt{2}$, $\quad y^4 - 96a^2y^2 + 5.000a^4 - 2.500a^4 = 0$

o sea

$$y^4 - 96a^2y^2 + 2.500a^4 = 0$$

ecuación bicuadrada que no tiene raíces.

Para $y = 0$, se tiene $100a^2x - x^4 = 0$, de donde $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 10a, \end{cases}$

para $y = \pm 4a\sqrt{3}$, se tiene

$$2.304a^4 - 4.608a^4 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$$
$$x^4 - 100a^2x^2 + 2.304a^4 = 0$$

cuyas raíces son

$$x^2 = 64a^2 \quad \text{y} \quad x = \pm 8a,$$
$$x^2 = 36a^2 \quad \text{y} \quad x = \pm 6a.$$

Para que y sea real es necesario, según la ecuación (1), que

$$B^2 - 4AC > 0,$$

o sea

$$\Delta = 2.304a^4 - 100a^2x^2 + x^4 \geqslant 0$$

es decir, x^2 fuera del intervalo $64a^2$ y $36a^2$, de donde x exterior al intervalo $(6a, 8a)$ y $(-6a, -8a)$.

La suma de las raíces en y^2 es $96a^2$, siempre positiva, y el producto de las mismas en y^2 es $100a^2x^2 - a^4$, que será positivo para

$$x^2(100a^2 - x^2) > 0,$$

x debe encontrarse en en interior de las raíces del paréntesis, o sea entre

$$-10a \quad \text{y} \quad +10a.$$

Se puede entonces hacer la tabla en donde haremos variar x de 0 a $+\infty$, ya que la curva es simétrica con relación a los dos ejes.

x	0		$6a$	$8a$		$10a$	$+\infty$
y'	$\frac{5}{\sqrt{24}}$	y 0	∞	∞		∞	1
y	0 y $4a\sqrt{6}$		$4a\sqrt{3}$	$4a\sqrt{3}$		0 y $4a\sqrt{6}$	∞
Δ	+			+		+	
Suma	+			+		+	
Producto	+			+		—	
Raíces	4 raíces en y			4 raíces en y		2 raíces en y	

Así obtenemos la curva de la figura 106.

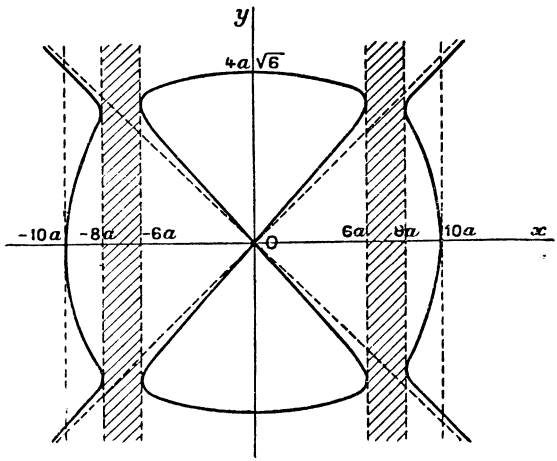

FIG. 106

CAPITULO XII

ESTUDIO Y TRAZADO DE LAS CURVAS EN COORDENADAS POLARES

El empleo de las coordenadas polares permite, con frecuencia, hallar fácilmente la ecuación de una curva, haciendo más sencillos los cálculos. En primer lugar vamos a hallar las ecuaciones de las curvas fundamentales en coordenadas polares, y después estudiaremos las tangentes y las asíntotas a dichas curvas, así como el trazado de éstas.

109. Ecuación de la línea recta. — Consideremos, en la figura 107,

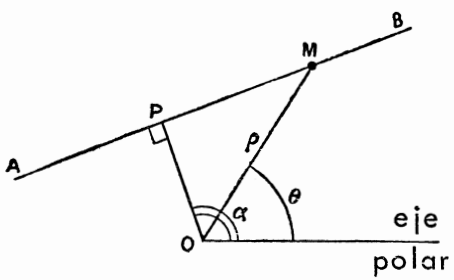

FIG. 107

la recta AB y el polo O: tracemos la perpendicular OP = p, y sea α el ángulo que forma con el eje polar (α varía de 0 a 2π).

$$OP = OM \cdot \cos(\alpha - \theta),$$

de donde

$$OM = \rho = \frac{p}{\cos(\alpha - \theta)} = f(\theta) \qquad (1)$$

siendo θ la variable, y α una constante.

— Desarrollando cos $(\alpha - \theta)$, se puede escribir esta expresión bajo la forma general

$$\rho = \frac{A}{B \operatorname{sen} \rho + C \cos \theta} \quad \text{o} \quad \frac{1}{M \operatorname{sen} \theta + N \cos \theta} \tag{2}$$

Inversamente, esta expresión representa una recta, ya que se tiene

$$\rho \cdot B \operatorname{sen} \theta + \rho \cdot C \cos \theta = A$$

y, considerando el eje polar como eje de las x y la perpendicular como eje de las y, se tendrá (figura 108)

$$B \cdot \rho \operatorname{sen} \theta + C \cdot \rho \cos \theta = A$$

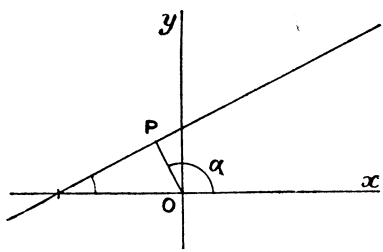

FIG. 108

o sea

$$By + Cx = A,$$

que es una recta.

— Para pasar de la ecuación (2) a la (1), basta hacer

$$C = \sqrt{B^2 + C^2} \cos \alpha$$

y

$$B = \sqrt{B^2 + C^2} \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{B^2 + C^2} \cdot \cos (\alpha - \theta)} = \frac{p}{\cos (\alpha - \theta)}.$$

Obsérvese que el ángulo α es igual al ángulo de inclinación de la recta $By + Cx = A$, ángulo al que hay que sumar $\frac{\pi}{2}$ (fig. 107).

Ejemplo. — Consideremos las rectas $y = x - 5$, cuya pendiente es 1, y con una inclinación de 45°. En este caso $\alpha = 45° + 90° = 135°$, y expresando la recta bajo esta forma

$$y - x = -5,$$

se obtiene

$$p = \frac{A}{\sqrt{B^2 + C^2}} = \frac{-5}{\sqrt{1 + 1}} = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

La ecuación de la recta es, pues,

$$\rho = \frac{p}{\cos (\alpha - \theta)} = \frac{-5}{\sqrt{2} \cdot \cos (135° - \theta)},$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2),

$$\rho = \frac{-5}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}.$$

110. Ecuación de la circunferencia. — Sea la circunferencia de centro x_0y_0, cuya ecuación es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

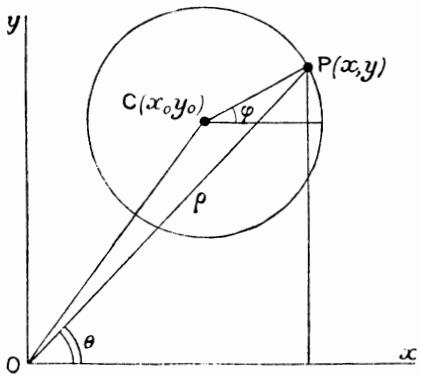

FIG. 109

Llamando ρ al radio vector OP (fig. 109), se tiene:

$$\left|\begin{array}{l} x = \mathrm{OP}\cos\theta = \rho\cos\theta \\ y = \mathrm{OP}\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\theta, \end{array}\right.$$

y de aquí

$$(\rho\cos\theta - x_0)^2 + (\rho\operatorname{sen}\theta - y_0)^2 = R^2$$

o sea

$$\rho^2 - 2\rho(x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0.$$

Si el centro está en el origen O, se tiene

$$\rho = R.$$

Circunferencia que pasa por el polo.

1.° El centro está en el eje polar (fig. 110):

$$\rho = 2R\cos\theta;$$

2.° El centro está en la perpendicular al eje polar, que pasa por el polo:

$$\rho = 2R\operatorname{sen}\theta.$$

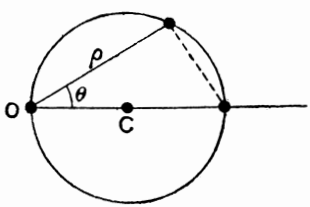

FIG. 110

111. Ecuación de la elipse (fig. 111). — Tomemos por polo el foco F de la izquierda, y por eje polar el eje mayor AA'. Tendremos

$$FM^2 = FP^2 + PM^2,$$

Ahora bien, en el capítulo I se había hecho

$$AA' = 2a, \quad BB' = 2b, \quad OF = c,$$

de donde

$$FM^2 = \rho^2 = (c + x)^2 + y^2 = c^2 + x^2 + 2cx + \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2$$

$$= c^2 + x^2 + 2cx + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

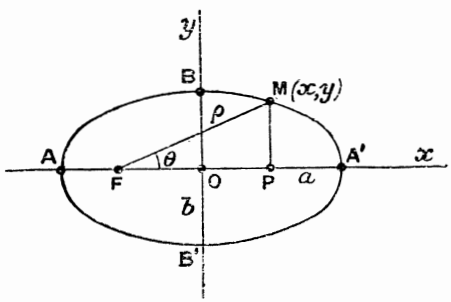

FIG. 111

Entonces

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

de donde

$$\rho^2 = c^2 + x^2 + 2cx + (a^2 - c^2) - \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2$$

y

$$\rho = \frac{cx}{a} + a.$$

Por lo tanto, se tiene

$$FP = \rho \cos\theta = c + x,$$

de donde

$$\rho = \frac{c}{a}(\rho\cos\theta - c) + a = \frac{c\,\rho\cos\theta}{a} - \frac{c^2}{a} + a$$

$$\rho\left(1 - \frac{c\cos\theta}{a}\right) = \frac{c^2}{a} + a$$

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\theta} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\theta},$$

ahora bien, $\frac{c}{a}$ es la excentricidad de la elipse, y haciendo $\frac{b^2}{a} = p$:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cdot\cos\theta} = \frac{b^2}{a - c\cdot\cos\theta}}$$

112. Ecuación de la parábola (fig. 112). — Hemos visto en el § 8, al establecer la ecuación de la parábola $y^2 = 2px$, que la distancia del vértice O al foco y a la directriz era $\frac{p}{2}$. Tomando el punto F como polo y llamando ρ al radio vector MF, tendremos

$$\rho = MF = MA = \frac{p}{2} + x$$

$$= \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2} + \rho\cos\theta\right)$$

de donde

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}}$$

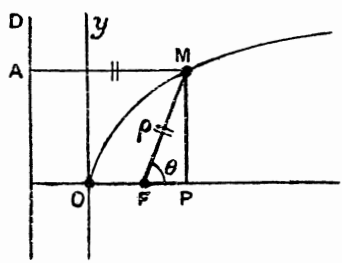

FIG. 112

113. Ecuación de la hipérbola (fig. 113). — Consideremos el foco F de la derecha como polo, y calculemos la distancia ρ de un punto

M cualquiera al foco. El triángulo MFP nos da (puesto que OF = c, y $a^2 - c^2 = -b^2$):

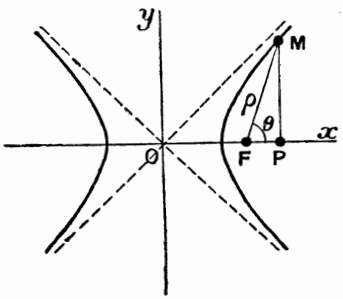

FIG. 113

$$\rho^2 = MP^2 + FP^2 = y^2 + (x-c)^2$$

$$= \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)^2 + (x-c)^2$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + x^2 + c^2 - 2cx$$

$$= \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 + (a^2 - c^2) + x^2 + c^2 - 2cx$$

$$= \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - 2cx = \left(\frac{cx}{a} - a\right)$$

y

$$\rho = \frac{cx}{a} - a.$$

Por otra parte, se tiene

$$\rho \cdot \cos\theta = FP = x - c,$$

deduzcamos x y sustituyamos su valor en la expresión anterior de ρ

$$\rho = \frac{c}{a}(\rho \cdot \cos\theta + c) - a$$

$$= \frac{c}{a}\rho \cdot \cos\theta + \frac{c^2}{a} - a$$

de donde

$$\rho = \frac{\frac{c^2}{a} - a}{1 - \frac{c}{a}\cos\theta} = \frac{c^2 - a^2}{a - c \cdot \cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a} \cdot \cos\theta},$$

hagamos

$$\frac{b^2}{a} = p \qquad y \qquad \frac{c}{a} = e = \text{excentricidad},$$

de donde

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cdot \cos\theta} = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta}$$

que tiene la misma forma que la ecuación de la elipse.

— ¿Se aplica esta fórmula también a la otra rama de la hipérbola?

La fórmula anterior $\rho = f(\theta)$ puede, evidentemente, dar valores negativos. Entonces, se puede comprobar que si se conviene en llevar los valores negativos hallados para ρ *sobre la prolongación* de la dirección determinada por la amplitud correspondiente, se obtiene así la otra rama de la hipérbola. No lo comprobaremos aquí.

En resumen, se pueden expresar las tres cónicas por la ecuación

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta}$$

si $e = 1$, se tiene una parábola,

si $e < 1$, se tiene una elipse,

si $e > 1$, se tiene una hipérbola.

Ejemplo. — Sea la parábola

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}$$

y dos radios vectores con origen en el foco, opuestos entre sí (formando un ángulo igual a π*), y de longitudes iguales a*

$$\rho_1 = 2 \quad \text{y} \quad \rho_2 = 6.$$

Calcular los elementos de la parábola.

— Para los dos radios vectores, tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} 1 - \cos\theta_1 = \dfrac{p}{\rho_1} = \dfrac{p}{2} \\ \\ 1 - \cos(\rho_1 + \pi) = \dfrac{p}{\rho_2} = \dfrac{p}{6}. \end{array} \right.$$

Lo que determina el sistema de dos ecuaciones

$$1 - \cos\theta_1 = \frac{p}{2} \qquad \text{y} \qquad 1 + \cos\theta_1 = \frac{p}{6}.$$

Sumando y restando miembro a miembro, se obtiene

$$2 = \frac{p}{2} + \frac{p}{6} \quad \text{de donde} \quad p = 3,$$

y

$$2\cos\theta_1 = \frac{p}{6} - \frac{p}{2} = -1$$

o sea

$$\cos\theta_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \theta_1 = 120°.$$

114. La evolvente del círculo. — Si enrollamos un hilo sobre una circunferencia, fijando uno de sus extremos en un punto de ésta, y lo desenrollamos partiendo del otro extremo, manteniéndolo siempre tirante, este extremo describe una *evolvente* del círculo.

Se engendra también esta curva suponiendo el caso de una recta MN que gira, sin deslizar sobre una circunferencia fija de centro O (fig. 114): un punto cualquiera, M de esta recta describe una evolvente.

— Expresemos que la tangente BM tiene una longitud igual al arco AB, siendo A la posición inicial.

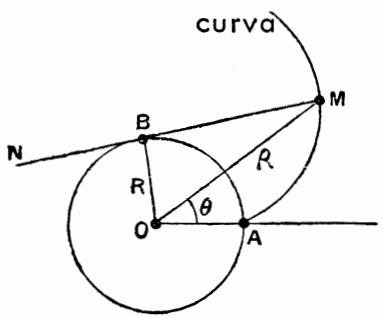

FIG. 114

Si ρ es un radio vector cualquiera OM, se tiene

θ = ángulo BOA — ángulo BOM.

Luego, el valor del ángulo BOA es

$$\frac{\text{arc BA}}{R} = \frac{BM}{R} = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2}}{R}$$

o sea

$$\theta = \frac{1}{R}\sqrt{\rho^2 - R^2} - \text{arc}\cos\frac{R}{\rho}.$$

En Mecánica se utiliza esta curva para determinar el perfil de los dientes de un engranaje.

115. Tangentes a una curva. —Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación de la curva.

Determinaremos la posición de la tangente, en un punto M cualquiera de la curva, por el ángulo ω que forma con el radio vector (fig. 115).

—Si θ se incrementa en $\Delta\theta$, M se transforma en M'. Tracemos la secante MM' y sea ω' el ángulo que *forma* con el nuevo radio vector. Si $\Delta\theta \to 0$, $M' \to M$, y la secante MM' se confunde con la tangente a la curva, y ω' tiende a ω. Entonces, calculemos $\operatorname{tg}\omega'$, y hallemos el límite.

Trazando la perpendicular MP. Se tiene

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{MP}{M'P}$$

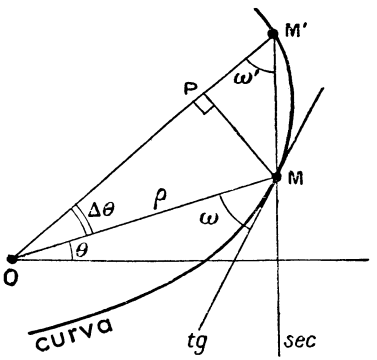

FIG. 115

con

$$MP = \rho \cdot \operatorname{sen}\Delta\theta \quad \text{y} \quad PM' = OM' - OP = (\rho + \Delta\rho) - \rho \cdot \cos\Delta\theta,$$

de donde

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\rho \cdot \operatorname{sen}\Delta\theta}{\rho(1 - \cos\Delta\theta) + \Delta\theta} = \frac{\rho \cdot \operatorname{sen}\Delta\theta}{\rho \cdot 2\operatorname{sen}^2\frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\rho}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $\Delta\theta$:

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\rho \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} + \dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}},$$

si $\Delta\theta \to 0$, también $\Delta\rho$, y en el límite:

$$\operatorname{tg}\omega = \lim \operatorname{tg}\omega' = \frac{\rho \cdot 1}{\rho \cdot 0 + \rho'}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho}{\rho'}}$$

Se puede dibujarla gráficamente de la siguiente forma: tracemos por M la perpendicular a la tangente, y por O la perpendicular ON al radio vector. Ambas se cortan en N, y se tiene, evidentemente (fig. 116):

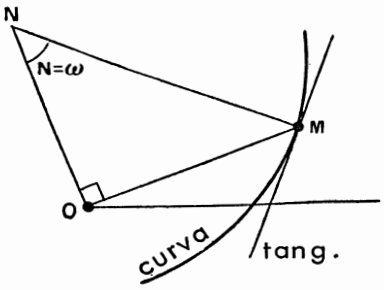

FIG. 116

$$N = \omega.$$

Se obtiene así

$$\operatorname{tg} N = \frac{OM}{ON} = \frac{\rho}{ON},$$

y como

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\rho}{\rho'}$$

resulta

$$ON = \rho'.$$

Tomando entonces sobre la perpendicular ON una longitud igual a ρ' (calculada para el punto M), se obtiene el punto N. Se traza MN y basta dibujar la perpendicular NM a ésta en M.

Ejemplo. — Hallar una curva en la que el ángulo ω *sea constante, es decir, que corte bajo un ángulo constante a todos los radios vectores.*

— Se tendrá

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\rho}{\rho'} = a,$$

de donde se deduce

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho}{a}$$

y

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta}{a}.$$

Integremos

$$\log \rho = \frac{\theta}{a} + \log K$$

de donde

$$\rho = K \cdot e^{\theta/a},$$

el radio vector crece exponencialmente, y ésta es la ecuación de la *espiral logarítmica.*

Tangente en el polo. — Cuando una curva pasa por el polo, el ángulo polar de la tangente a la curva, en ese punto, es igual al valor del ángulo polar θ que anula ρ.

— En efecto, sea un punto M cualquiera de la curva $\rho = f(\theta)$, (fig. 117). Vemos que si el punto M se aproxima al polo O, ρ y θ varían, y el ángulo formado por la tangente a la curva en el polo O tiene por valor el ángulo θ que se anula ρ.

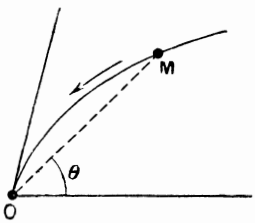

FIG. 117

Ejemplo. — Sea la curva $\rho = a \cos \theta$.

— Se verifica que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ es $\rho = 0$, y la tangente a la curva es perpendicular al eje polar.

116. Ramas infinitas y asíntotas. — Para que existan, es necesario, evidentemente, que ρ se haga infinito. Se buscará, pues, el valor de θ que determina esta condición.

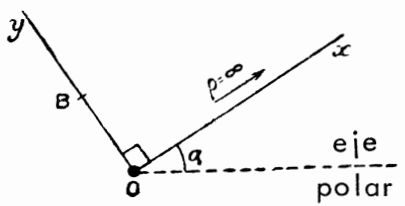

FIG. 118

Pero, para trazar con precisión la asíntota, se recurrirá a las coordenadas cartesianas, tomando como eje Ox la dirección que hace a ρ infinito.

— Sea α el ángulo que forma este nuevo eje con el eje polar primitivo (fig. 118).

Las coordenadas de un punto P cualquiera de la curva con relación de los nuevos ejes (figura 119), serán:

$$x = \rho \cos (\theta - \alpha) \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{cen} (\theta - \alpha),$$

y, por otra parte, para $\theta = \alpha$, x e y son infinitos (o sólo uno de los dos):

Hallemos, pues, el límite de $\frac{y}{x}$, para $\theta = \alpha$:

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\rho \operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{\rho \cos (\theta - \alpha)} = \lim \operatorname{tg} (\theta - \alpha) = 0,$$

luego, la dirección asintótica es Ox, y α el ángulo.

Designando por m la pendiente de la asíntota, se halla el límite de $y = mx = p$ (con $m = 0$):

$$\lim (y - mx) = \lim y = \lim [\rho \operatorname{sen} (\theta - \alpha)].$$

Este valor límite de y se llevará sobre Oy en B, es decir, en una dirección $\alpha + \frac{\pi}{2}$ con relación al eje polar primitivo (fig. 120).

Si OB es infinito, la asíntota se encuentra en el infinito.

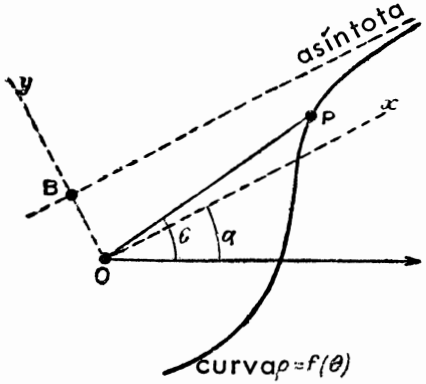

FIG. 119

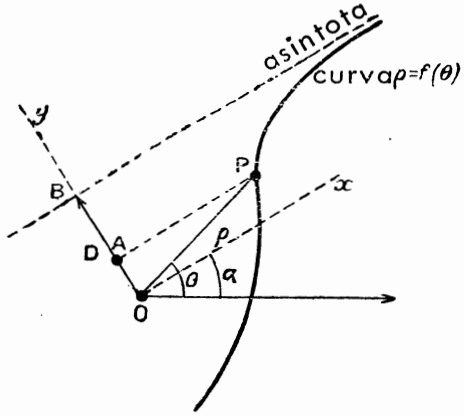

FIG. 120

Ejemplo. — *Sea la curva*

$$\rho \frac{a}{1 - 2 \cos \theta}.$$

— Se tiene $\rho = \infty$ para $\cos \theta = \frac{1}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Luego, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, y el nuevo valor del ángulo θ es $\theta + \frac{\pi}{3}$, y se tendrá:

$$p = \lim \left[\rho \operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \rho \cdot \operatorname{sen} \varepsilon \qquad (\varepsilon \to 0)$$

$$= \frac{a \cdot \operatorname{sen} \varepsilon}{1 - 2 \cos \left(\frac{}{3} + \varepsilon\right)} = \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon}{1 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \varepsilon - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} \varepsilon\right)}$$

$$= \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon + \sqrt{3} \operatorname{sen} \varepsilon}$$

y sustituyendo sen ε y cos ε por sus desarrollos en serie de MAC-LAURIN se tendrá:

$p =$ límite

$$\frac{1-(1+\ldots)+\sqrt{3}(\varepsilon+\ldots)}{a(\varepsilon+\ldots)}=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

valor que se llevará sobre Oy (fig. 121).

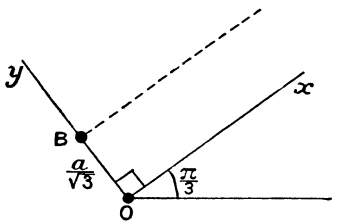

FIG. 121

117. Intervalos en que varía el ángulo polar. — Se incrementa θ en 2π, 4π... hasta que ρ vuelva a tomar el mismo valor; sea, por ejemplo, 6π: es decir, que ρ da tres vueltas para volver a pasar por los mismos puntos (*).

Si $\rho = f(\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$ el intervalo de variación de θ es 2π.

Si $\rho = f(\text{sen}\,2\theta, \cos 2\theta)$ el intervalo de variación de θ es π.

Si $\rho = f\left(\text{sen}\,\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$ el intervalo de variación de θ es 4π.

Al sumar $K\pi$ a θ puede ocurrir que:

ρ no cambie de signo (**). Entonces K es impar y a cada punto M le corresponde un punto simétrico con relación al polo, y el intervalo de variación de θ será $K\pi$;

ρ cambie de signo, y:

a) Si K es impar ,el intervalo de variación de θ será $K\pi$ solamente;

b) si K es par, el polo es centro de simetría y θ variará en el intervalo $K\pi$.

En resumen, se sustituirá θ por $-\theta$ o bien por $(K\pi - \theta)$.

Ejemplos

1.° Sea

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta}.$$

N. del T.

(*) Es decir, se busca el menor múltiplo de 2π, que añadido a θ no altera la ecuación, siendo este múltiplo el período de variación de θ.

(**) Si ρ no cambia, K es necesariamente impar, puesto que de lo contrario sería $K\pi$ el menor múltiplo de 2π, que aumentado a θ no altera la ecuación de la curva, y no 2 $K\pi$. Por tanto, la curva es simétrica respecto del polo, y basta tomar el intervalo $K\pi$ para construir la mitad de la curva, obteniéndose la otra mitad por medio de la simetría.

— Si θ aumenta en 2π, ρ no cambia, luego, para tener toda la curva, θ variará en el intervalo de 2π.

Si θ se transforma en $\theta + \pi$, ρ cambia de signo.

Si θ se transforma en $-\theta$, ρ no cambia, existiendo simetría con relación al eje polar, y θ variará solamente de 0 a π.

2.° Sea

$$\rho = a \operatorname{sen} \theta.$$

— Si θ aumenta en 2π, ρ no cambia, luego θ variará, como máximo, en el intervalo 2π.

Si θ aumenta en π, ρ cambia de signo, y, por tanto, para tener toda la curva, θ no variará más que de 0 a π.

Si θ se hace $\pi - \theta$, ρ no cambia, existiendo simetría con relación a una perpendicular al eje polar, y θ sólo variará de 0 a $\frac{\pi}{2}$, para tener la semicurva.

— Lo anterior se va a concretar en el trazado y estudio detallado de algunas curvas.

118. Trazado de una curva en coordenadas polares. — El sentido de de la variación de ρ tiene poca importancia, careciendo de interés el cálculo de ρ'. Por el contrario, es necesario conocer el signo de ρ cuando la curva se traza barriendo el plano por una recta, y si θ varía de α a β, por ejemplo, dicha recta barre el ángulo formado por dos zonas opuestas por el vértice y la curva se sitúa en uno u otro de estos dos ángulos, según sea el signo de ρ.

En resumen, las reglas a seguir para el trazado de la curva son:

REGLAS:

1.ª *Se determina el intervalo de variación de* θ *(ver lo escrito anteriormente), así como las simetrías.*

2.ª *Se hallan las discontinuidades de* ρ*, y los valores de* θ *en los que* ρ *no existe.*

3.ª *Se buscan los valores de* θ *que anulen* ρ.

4.ª *Se compone la tabla de variaciones, y se determina el signo de* ρ *en cada intervalo de* θ*, así como sus valores extremos, lo que nos da arcos de curvas en determinados ángulos.*

5.ª *Se determinan las asíntotas y las tangentes importantes.*

— Apliquemos estas reglas a algunos ejemplos.

119. Ejemplos.

1.°

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

— Si θ aumenta en 2π, ρ cambia de signo.

Si θ aumenta en 4π, ρ no cambia, luego θ variará de 0 a 4π.

Si θ aumenta en 2π, ρ cambia de signo, y existe simetría con relación al polo, luego sólo se estudiará el intervalo de 0 a 2π.

Si se transforma θ en $-\theta$, ρ cambia de signo, habiendo simetría con relación a Oy, y, en resumen, se hará variar θ de 0 a π.

Por último, ρ es siempre real. Obsérvese que $y = 0$, es una dirección asintótica ($\alpha = 0$), y se tendrá

$$p = \text{límite}\,[\rho \operatorname{sen}(\theta - \alpha)] = \frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \operatorname{sen}(\theta - 0)$$

$$= \frac{a\theta}{\frac{\theta}{2}} = 2a$$

que es la ordenada en el origen de la asíntota trazada sobre Ox (que llamaremos *subasíntota*).

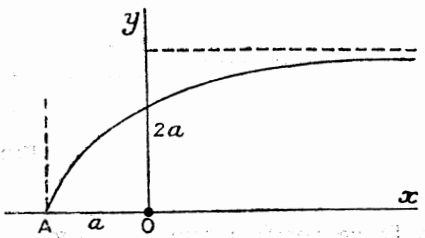

FIG. 122

Tenemos

$$\rho \operatorname{sen}\theta = \frac{a}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} = 2a \cos\frac{\theta}{2}$$

valor que es $< 2a$, luego la curva está por debajo de la asíntota.

Hallemos la tangente en A (fig. 122), para $\theta = \pi$; se tiene

$$\rho' = -\frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cos\frac{\theta}{2} = 0$$

de donde

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \infty, \qquad \text{y} \qquad V = \frac{\pi}{2},$$

luego la tangente es perpendicular a OA.

Así podremos construir la tabla siguiente, y para dibujar la curva completa se trazará la curva simétrica con relación a Oy y al polo (fig. 123).

0	0		π
ρ	$+\infty$	$+$	a

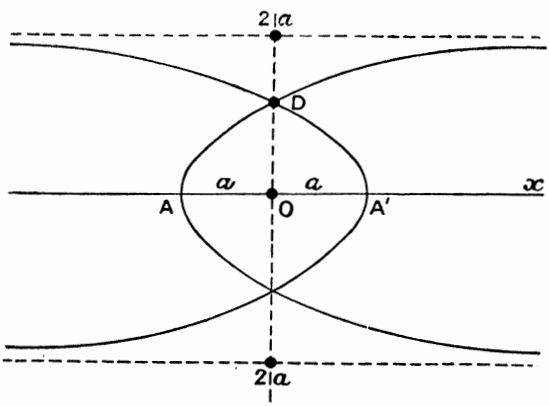

FIG. 123

En D, se verifica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\dfrac{a}{\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}}}{-\dfrac{a}{\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}} \cdot \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} = -2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -2,$$

es decir, que la tangente a la curva en ese punto forma con Oy un ángulo cuya tangente es -2.

Espirales. — Existen varios tipos:

2.° *Espiral de Arquímedes.* — Consideremos una recta que gira alrededor del polo O con movimiento uniforme, y desplazándose sobre ella, también, con movimiento uniforme, un móvil. Este descri-

birá en el espacio una espiral en la que el radio vector es proporcional al ángulo θ.

$$\rho = a\theta.$$

Esta ecuación es la espiral de Arquímedes (fig. 124-*a*).

— Si se cambia θ en $-\theta$, ρ varía de signo, y existe simetría con relación a Oy. La mitad de la curva se obtiene haciendo variar θ de 0 a $+\infty$. Carece de asíntotas y ρ siempre existe.

Para $\theta = 0$, $\rho = 0$, y la curva pasa por el origen, siendo la tangente en él

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{a\theta}{a} = \theta = 0$$

que es el eje polar.

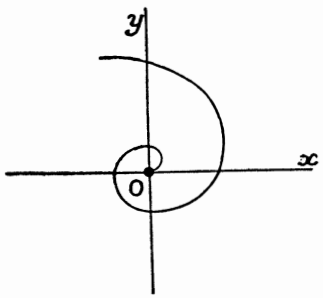

FIG. 124-*a*

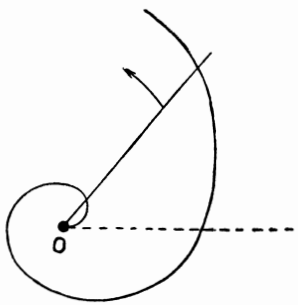

FIG. 124-b

Por último, si ρ tiene el mismo signo que θ, puede construirse la tabla siguiente, en la que θ varía de 0 a 2π.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi \ldots \infty$
ρ	0	$\frac{\pi a}{2}$	πa	$\frac{3\pi a}{2}$	$2\pi a \ldots \infty$

La curva gira indefinidamente alrededor del polo, siendo el radio vector proporcional a θ (fig. 124-b).

3.° *Espiral hipérbolica*

$$\rho = \frac{a}{\theta}.$$

— Naciendo la curva en el infinito para $\theta = 0$, con $\rho = \infty$, da infinitas vueltas alrededor del polo O, que es un *punto asintótico.*

Si se cambia θ en $-\theta$, ρ varía de signo, y, por tanto, existe simetría con respecto a Oy. Haciendo variar ρ de 0 a ∞, obtendremos la mitad de la curva (fig. 125), y trazando la simétrica se tendrá la otra mitad.

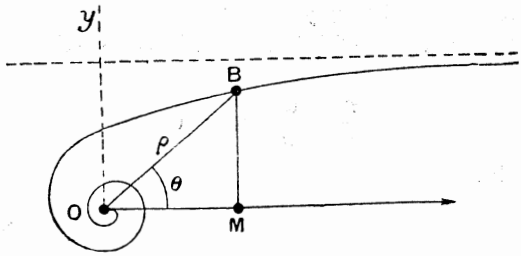

FIG. 125

Obsérvese que ρ solamente se anula para $\theta = \infty$, y ρ tiene el mismo signo que θ.

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\frac{a}{\theta}}{-\frac{a}{\theta^2}} = -\theta$$

y esto en cada punto. Por tanto, la tangente de V es igual al ángulo que forma el radio vector con el eje polar.

— Estudiemos la existencia de asíntotas: para ello, tomemos un punto B de la curva y tracemos la perpendicular MB al eje polar. Se tiene

$$MB = \rho \operatorname{sen} \theta = a \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta},$$

entonces, si θ tiende a cero, $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \to 1$, y en el límite $MB = a$. Luego Luego la curva tiene una asíntota paralela al eje polar y distante de ella a.

Por analogía con la hipérbola, a esta curva se le llama *espiral hipérbola.* Obsérvese, que la ecuación $\rho\theta = c^{te}$, es análoga a la de la hipérbola equilátera

$$xy = \text{constante}$$

Resumiendo, tendremos la tabla

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi \ldots \infty$
ρ	∞	$\frac{2a}{\pi}$	$\frac{a}{\pi}$	$\frac{2a}{3\pi}$	$\frac{a}{2\pi} \ldots 0$

4.° *Espiral logarítmica*

$$\rho = ae^{\theta}.$$

Es el lugar geométrico de los puntos en donde el radio vector ρ crece en progresión geométrica cuando el ángulo θ crece en progresión aritmética.

— En esta curva, se ha visto que todos los radios vectores cortan a la espiral bajo el mismo ángulo; en efecto

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{ae^{\theta}}{ae^{\theta}} = 1 = \text{constante}.$$

Su forma, que sigue una ley logarítmica, sirve para construir «círculos de cálculo», jugando el mismo papel que las «reglas de cálculo».

ρ es siempre real para todo valor de θ y no existe simetría; θ variará de 0 a $+\infty$.

Carece de asíntotas, y para $\theta = \infty$, $\rho = \infty$.

Se tienen así la figura 126 y la tabla siguiente:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi \ldots +\infty$
ρ	a	$ae^{\pi/2}$	ae^{π}		$+\infty$

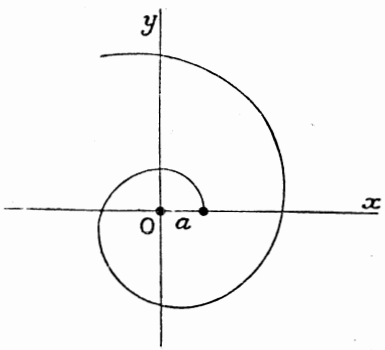

FIG. 126

5.° *Caracol de Pascal.* — Consideremos la circunferencia de diámetro OA = a, y el polo O situado sobre el diámetro. Tomemos un punto B cualquiera y aumentemos el radio vector OB en una cantidad constante, por ejemplo a misma. Tenemos, para el radio vector ρ de un punto C de la curva (fig. 127 y 128):

$$\rho = OB + a = OC$$
$$= a\cos\alpha + a = -a\cos\theta + a$$

o bien

$$\rho = a(1 - \cos\theta),$$

si $\theta < \frac{\pi}{2}$, el coseno es positivo, y es necesario restar OB de a, lo que proporciona la curva de la figura 128.

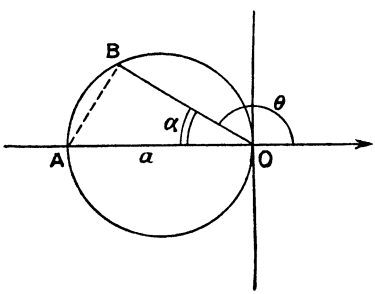

FIG. 127

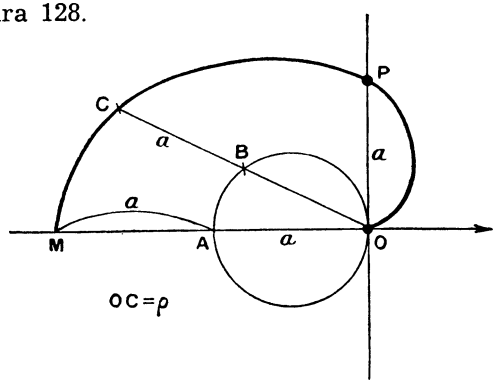

FIG. 128

La curva es simétrica con relación al eje polar, ya que variando θ en $-\theta$, ρ no cambia.

El mínimo de ρ se alcanza para

$$\theta = 0 \text{ ó } 2\pi \quad \text{y} \quad \rho = 0,$$

y el máximo para

$$\theta = \pi \quad \text{y} \quad \rho = 2a.$$

— Para hallar el punto más elevado de la curva, calculemos la tangente a ella: el ángulo de dicha tangente con el radio vector viene dado por

$$\operatorname{tg} V = \frac{\theta}{\theta'} = \frac{a(1 - \cos\theta)}{a\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

entonces, el ángulo V es igual a la mitad del ángulo polar. El ángulo formado por la tangente a la curva con el eje polar, teniendo en cuenta la figura 129, es

$$\theta + V = \theta + \frac{\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}.$$

La tangente será perpendicular al eje polar cuando

$$\frac{3\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{o bien} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \text{o bien} \quad \frac{5\pi}{2},$$

de donde

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{o bien} \quad \pi \quad \text{o bien} \quad \frac{5\pi}{3}.$$

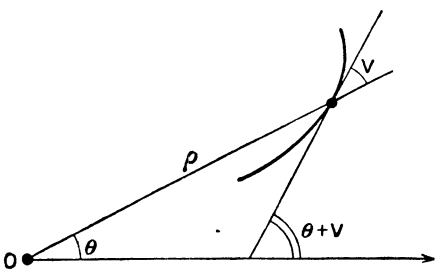

FIG. 129

La tangente será horizontal para

$$\frac{3\theta}{2} = \pi \quad \text{o bien} \quad 2\pi$$

de donde

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{o bien} \quad \frac{4\pi}{3}.$$

Se tendrá así la tabla siguiente, que permitirá determinar la forma de la curva:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$
$\theta + V$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

Esta curva se utiliza en *Radiogonometría* cuando se intenta localizar la señal de un emisor de radio. Para ello se emplean dos receptores provistos de una antena de cuadro móvil que gira alrededor de un eje vertical. Situados en distintos lugares, captan el sentido y la dirección de la emisión, y por intersección de ambas direcciones se tendrá el emplazamiento del emisor.

6.° *Rosetón de cuatro hojas.*

Sea la recta AB de longitud constante que desliza sobre los ejes Ox y Oy. Tracemos la perpendicular OM sobre AB, y veamos que el lugar geométrico del punto M es la hoja F_1. Situando la recta AB en los otros tres cuadrantes obtendremos tres hojas idénticas a la primera (fig. 130).

— Consideremos el eje Ox como eje polar y llamemos $2a$ a la longitud de la recta AB. Se tiene

$$OB = 2a\cos\theta \qquad OA = 2a\operatorname{sen}\theta,$$

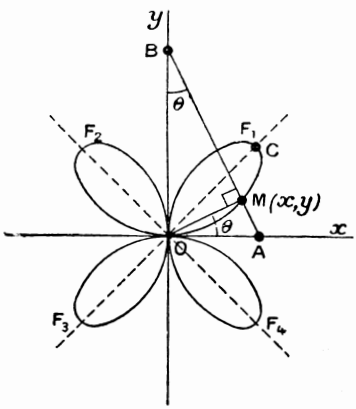

FIG. 130

siendo

$$OM = \rho = f(\theta).$$

Entonces, igualando los dos valores del área del triángulo OAB, se tiene

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}OM \cdot AB$$

de donde

$$\frac{1}{2} \cdot 2a\operatorname{sen}\theta \cdot 2a\cos\theta = \frac{1}{2}\rho \cdot 2a$$

$$2a\rho = 4a^2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$$

$$\rho = 2a\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = a\operatorname{sen}2\theta$$

o bien

$$\rho^2 = a^2\operatorname{sen}^2 2\theta.$$

Si θ se transforma en $-\theta$, ρ cambia de signo y por tanto la curva es simétrica con relación al eje Oy.

Si θ aumenta en π, ρ no cambia, y por consiguiente el polo es un eje de simetría. Se puede, pues, hacer variar θ sólo de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Si se cambia 2θ en $\pi - 2\theta$, o θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$, ρ no varía, luego, la primera bisectriz es un eje de simetría, reduciéndose el intervalo de variación de θ de 0 a $\frac{\pi}{4}$.

En este intervalo ρ es siempre finito, y se anula para $\theta = 0$.

Por otra parte, se tiene

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a \operatorname{sen} 2\theta}{2a \cos 2\theta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\theta,$$

que para $\theta = 0$, $V = 0$, la tangente es horizontal,

que para $\theta = \frac{\pi}{4}$, $V = \frac{\pi}{2}$, la tangente es perpendicular al radio vector en C, y en dicho punto se verifica

$$\rho = a \cdot \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} = a.$$

Así se tiene la rama de curva OMC; hallando después la curva simétrica con relación al eje Oy, se obtiene la hoja F_2, y, por último, dibujando la curva simétrica con relación al eje polar Ox se obtienen las dos hojas F_3 y F_4, quedando determinado el rosetón de cuatro hojas (fig. 130).

Es fácil expresar esta curva en coordenadas cartesianas, pues escribiendo para un punto M cualquiera:

$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \rho^2 &= a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 2\theta \\ &= a^2 \cdot 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta = 4a^2 \frac{y^2}{\rho^2} \frac{x^2}{\rho^2} \\ &= \frac{4a^2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

de donde

$$(x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2y^2 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

La curva es simétrica con relación al eje Ox y al Oy, ya que

$$f(x, y) = f(-x, -y),$$

y, por lo tanto, es simétrica con relación al origen.

También lo es con relación a la primera bisectriz, porque

$$f(x, y) = f(y, x).$$

e, igualmente, con relación a la segunda, puesto que

$$f(x, y) = f(-y, x).$$

En resumen, solamente se hace variar θ de 0 a $\frac{\pi}{4}$, variando ρ de 0 a a.

— Si se calcula la superficie total de las cuatro ramas, se encuentra

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 \operatorname{sen}^2 2\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$$

7.° *Trazar la curva*

$$\rho = \frac{p}{1 - 2\cos^2\theta}.$$

— Si se cambia θ en $2\pi - \theta$, ρ no varía, luego la curva es simétrica con relación al eje polar.

Si se varía θ en $\pi - \theta$, ρ no cambia, y, por tanto, existe simetría respecto a $\theta = \frac{\pi}{2}$, y, por último, simetría con respecto al eje polar

Si

$$1 - 2\cos^2\theta = 0 \quad \text{de donde} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \frac{3\pi}{4}$$

se tiene

$$\rho = \infty.$$

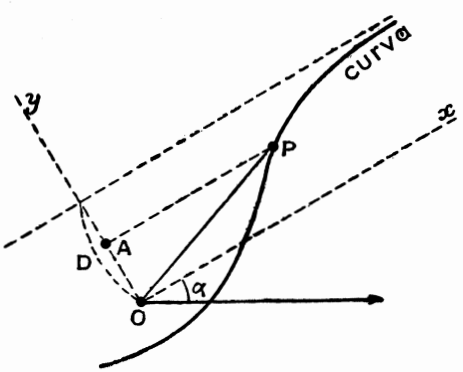

FIG. 131

— Para hallar las asíntotas se puede operar también de la manera siguiente, que emplearemos aquí a título de ejercicio. Determinemos la distancia D del polo O a la asíntota.

Sea la curva $\rho = f(\theta)$. Supongamos que

$$\rho = \infty \qquad \text{para} \qquad \theta = \alpha,$$

lo que proporciona la dirección de la asíntota o su pendiente. Hagamos, pues, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ y calculemos la distancia D del polo O a dicha asíntota (fig. 131).

Consideremos un punto P cualquiera de la curva, y tracemos la perpendicular PA. Se tiene

$$OA = \rho \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$$

luego

$$D = \text{límite de } OA = \lim \rho \cdot \operatorname{sen} (\theta - \alpha)_{\theta=\alpha}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{\frac{1}{\rho}}$$

o al tomar la inversa y sustituir sen $(\theta - \alpha)$ por $\theta - \alpha$.

$$\frac{1}{D} = \lim \left(\frac{\frac{1}{\rho}}{\theta - \alpha} \right) = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_\alpha}}{\theta - \alpha} = \frac{\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\Delta \theta}$$

expresión que representa la derivada de $\frac{1}{2}$ para $\theta = \alpha$,

$$\frac{1}{D} = \left(\frac{1}{\rho} \right)' \qquad \text{para} \qquad \theta = \alpha.$$

En nuestro caso tendremos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - 2\cos^2 \theta}{p}$$

cuya derivada es

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)' = \frac{-4 \cos \theta (-\operatorname{sen} \theta)}{p} \qquad \left(\text{para } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ y } \frac{3\pi}{4} \right)$$

Para

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{se tendrá} \qquad D = \frac{p}{2},$$

y para

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \qquad D = -\frac{p}{2},$$

pudiendo situar entonces las dos asíntotas.

Construyamos la tabla:

θ	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$		π
ρ	$-p$	$-\infty$	$+\infty$	p	$+\infty$	$-\infty$	$-p$

Se obtienen así las ramas de las curvas tomadas en el orden siguiente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, de la figura 132.

Se ha considerado la simétrica con relación al eje horizontal.

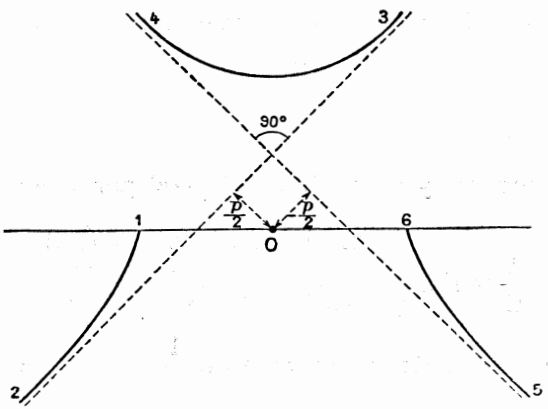

FIG. 132

CAPITULO XIII

ESTUDIO Y TRAZADO DE CURVAS PARAMETRICAS

Una curva expresada en coordenadas paramétricas (o una función paramétrica) es una curva en la que la abscisa x y la ordenada y vienen dadas en función de un parámetro t, θ, u, φ, etc. (que puede ser, por ejemplo, un ángulo, el tiempo, etc.). Dicha curva se representa por la expresión

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t).$$

En primer lugar hallemos las ecuaciones paramétricas de las curvas fundamentales.

120. Ecuaciones de algunas curvas fundamentales.

1.° **Línea recta** (fig. 133). — Consideremos una recta que pasa por el origen, y sea P un punto cualquiera de coordenadas α y β. La pendiente de esta recta es

$$m = \frac{\beta}{\alpha}$$

de donde

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

o bien

$$\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha} = t,$$

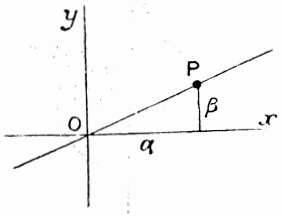

FIG. 133

y la ecuación de la recta es

$$\boxed{x = \alpha t \quad \text{e} \quad y = \beta t}$$

Caso de una recta cualquiera (fig. 134). — Esta recta se definirá trazando una paralela por el origen. Consideremos sobre ésta un punto P(α, β), y en la recta D un punto A conocido de coordenadas x_0 e y_0. Traslademos el origen a este punto.

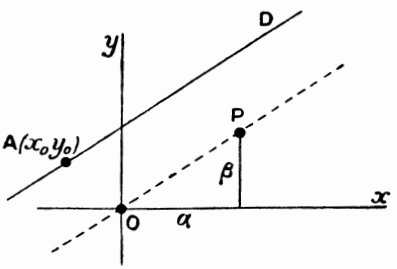

FIG. 134

Escribiendo, como anteriormente,

$$X = \alpha t \qquad e \qquad Y = \beta t,$$

se tendrá

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + X = x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + Y = y_0 + \beta t \end{aligned}}$$

que son las ecuaciones buscadas.

Observación. — Si la distancia OP = 1, los valores α y β se designan con el nombre de *cosenos directores de la recta.*

2.° **Circunferencia.** — Si el centro está en el origen (fig. 135), se tiene

$$\left| \begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \right.$$

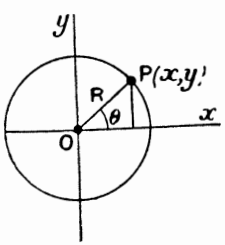

FIG. 135

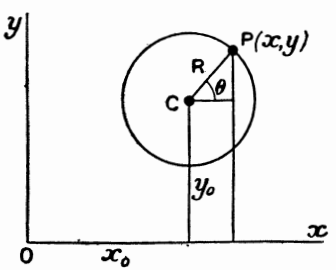

FIG. 136

Si las coordenadas del centro son x_0 e y_0 (fig. 136), se obtiene

$$\left| \begin{aligned} x &= x_0 + R \cos \theta \\ y &= y_0 + R \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \right.$$

3.° **Parábola.** — Sea $y^2 = 2px$.

Se tiene inmediatamente

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t. \end{array} \right.$$

4.° **Elipse** (fig. 137). — Sea la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

— Esta fórmula es semejante a la

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$$

hagamos

$$\frac{x}{a} = \cos \theta \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{b} = \operatorname{sen} \theta,$$

en donde x e y son las coordenadas de un punto M cualquiera de la elipse.

Tomemos *sobre la circunferencia de radio a* un punto M_1 de abscisa X y de ordenada Y. Se tiene

$$X = x,$$

ahora bien, hemos visto al estudiar la elipse, que la ordenada y de un punto de la misma es

$$y = Y \cdot \frac{b}{a},$$

y como, por otra parte, se tiene

$$X = a \cos \theta \qquad \text{e} \qquad Y = a \operatorname{sen} \theta$$

la ecuación paramétrica de la elipse es

$$\left| \begin{array}{l} x = a \cos \theta \\ y = b \operatorname{sen} \theta. \end{array} \right.$$

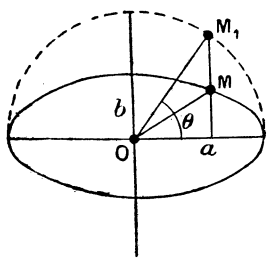

FIG. 137

5.° **Hipérbola.** — Sea la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— Transformémosla, como en el caso de la elipse, en una suma de cuadrados:

$$\frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2}$$

y

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{a^2}{x^2} = 1.$$

Se hará entonces

$$\frac{a}{x} = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{ay}{bx} = \operatorname{sen}\theta,$$

lo que da finalmente

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b \operatorname{tg}\theta. \end{array} \right.$$

6.° **Cicloide.** — Hemos establecido su ecuación en el párrafo 50 del tomo III:

$$\left| \begin{array}{l} x = \mathrm{R}(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = \mathrm{R}(1 - \cos\theta). \end{array} \right.$$

121. Estudio y trazado de curvas paramétricas. — Sea la curva paramétrica

$$x = f(t) \qquad \text{e} \qquad y = \varphi(t).$$

Para limitar el estudio de las variaciones de t, se puede comenzar estudiando la simetría.

Simetría. — Si cambiando t en $-t$, x e y se transforman en $-x$ y en $-y$, la curva es simétrica con respecto al origen 0.

Si cambiando t en $-t$, varía x en $-x$, sin que y cambie de signo, la curva es simétrica con respecto al eje Oy.

Si cambiando t en $-t$, y se transforma en $-y$, sin que x varíe de signo, la curva es simétrica con relación al eje Ox.

Así, la curva

$$x = a\cos t \qquad y = b\operatorname{sen} t,$$

por la tercera razón, es simétrica con relación al eje de Ox, siendo, pues, suficiente con hacer variar t de 0 a π.

Puntos particulares. — Para que la curva pase por el origen es necesario que el valor de t dé

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = 0.$$

A continuación se buscarán los valores de t que anulen a x e y, y, por último, se determinará la tangente en el origen por su coeficiente angular, calculando la relación $\frac{y}{x}$ para el valor $t = t_1$, que anula al mismo tiempo a x e y.

Igualmente, se calculará el coeficiente angular para todos los puntos críticos.

Así, por ejemplo, volviendo a considerar la curva de la elipse

$$x = a \cos t \qquad y = b \operatorname{sen} t,$$

los valores máximos de x y de y son, evidentemente, a y b.

Para $t = 0$, $x = a$ e $y = 0$, se tiene

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{b \cos t}{-a \operatorname{sen} t} = -\frac{b}{a \operatorname{tg} t},$$

luego, en dicho punto, $y' = \infty$, y la tangente es vertical.

Para $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = b$, e $y' = 0$, la tangente es horizontal.

Concavidad, convexidad, puntos de inflexión. — Al ser la pendiente de la tangente a la curva función de t

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = g(t),$$

basta estudiar y_x'', o sea $g'(t)$. Según hemos dicho en el estudio general de los puntos de inflexión, tendremos uno de tales puntos hallando los valores de t para los que $g'(t)$ se anula sin cambiar de signo.

Si $y_x'' > 0$, la concavidad está orientada hacia las y positivas, y hacia las negativas si $y_x'' < 0$.

Asíntotas. — La asíntota paralela a Oy se obtiene haciendo y infinita(sin que x lo sea), y la paralela a Ox haciendo infinito x (sin que lo sea y).

La asíntota oblicua se obtiene hallando el valor de t que hace infinitas, a la vez, a x y a y. El coeficiente angular de la asíntota se obtiene hallando

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\varphi(t)}{f(t)}, \quad (\text{para } x = \infty).$$

Si m es la pendiente, obtendremos la ordenada en el origen calculando el límite de $y - mx$, para $x = \infty$.

— En el cuarto y último ejemplo estudiaremos detalladamente, cómo se puede saber si una rama de curva está situada a un lado u otro de una asíntota.

122. Marcha a seguir para trazar la curva. — Sea la función paramétrica

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t).$$

1.° Se estudian los valores particulares

$$x = 0, \quad y = 0, \quad t = 0$$
$$x = \infty, \quad y = \infty, \quad t = \infty.$$

2.° Se halla si la curva pasa por el origen y se busca la ecuación de las tangentes en el origen.

3.° Se estudia la simetría de la curva, lo que permite restringir los límites entre los que varía t.

4.° Se buscan las ecuaciones de las asíntotas, paralelas a los ejes y oblicuas.

5.° Se calculan las derivadas x_t', y_t' e y_x', y se deducen los máximos y los mínimos, así como los valores de x y de t para los cuales

$$y' = 0 \quad \text{e} \quad y' = \infty$$

6.° Se construye una tabla *horizontal* de cuatro líneas, que contenga las variaciones de t, x, y' e y.

7.° Se traza la curva que, en realidad, es una interpretación gráfica de la tabla.

123. Ejemplos.

1.° Trazar la cicloide

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) = f(\theta)$$
$$y = R(1 - \cos\theta) = \varphi(\theta).$$

— Si se cambia θ en $-\theta$, x varía de signo, e y no cambia: luego, la curva es simétrica con relación al eje Oy, y θ variará de 0 a 2π, puesto que por encima de 2π, y vuelve a tomar periódicamente los mismos valores, mientras que x ha aumentado en $2\pi R$. Las otras ramas se obtendrán por traslaciones sucesivas de $2\pi R$ siguiendo Ox.

Se tiene

$$x_\theta' = R(1 - \cos\theta) = 0 \qquad \text{para} \quad \theta = 0 \quad \text{y} \quad 2\pi,$$
$$y_\theta' = R \operatorname{sen}\theta,$$

e

$$y_x' = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}, \tag{1}$$

siendo nula esta derivada para $\theta = \pi$.

Para $\theta = 0$ ó 2π, se tiene $y' = \frac{0}{0}$, de donde

$$y' = \frac{N'}{D'} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

luego, para $\theta = 0$ y 2π, resulta $y' = \infty$, y la tangente es vertical en esos dos puntos.

Así se obtienen la tabla siguiente, y la curva de la figura 138.

θ	0		π		2π	.....
x	0		πR		$2\pi R$	
y	0	↗	2R	↘	0	.....
y'	∞	+	0	—	∞	

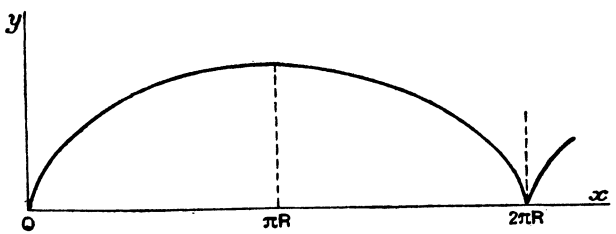

FIG. 138

Concavidad y convexidad. — Estudiemso el signo de y_x''. Se tiene

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} = m$$

y

$$y_x'' = \frac{dm}{dx} = \frac{\dfrac{dm}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{m_\theta'}{x_\theta'}.$$

Calculemos su valor en el caso de la cicloide, partiendo de la ecuación (1).

$$y_x'' = \frac{(1 - \cos\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}{\dfrac{(1 - \cos\theta)^2}{R(1 - \cos\theta)}}$$

$$= -\frac{1}{R(1 - \cos\theta)^2},$$

expresión que es siempre negativa, *y, por tanto, la curva tiene su concavidad dirigida hacia abajo.*

Obsérvese, por último, que para $x = 0$, 2π, 4π, etc., la curva tiene un punto de retroceso.

2.° Sea la curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{t+2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t-5}{t^2-4t+3} = \dfrac{t-5}{(t-3)(t-1)} \end{cases}$$

— Calculemos, en primer lugar, los valores críticos:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{para} & t = -2 \\ y = \infty & \text{para} & t = \pm 1 \\ y = 0 & \text{para} & t = 5 \\ y = \infty & \text{para} & t = 3 \\ y = \infty & \text{para} & t = 1. \end{array}$$

Por último, para $t = \infty$, $x = y = 0$.

Obtendremos las tangentes en el origen hallando la relación $\frac{y}{x}$ para el valor de t que anule a x e y, o sea, para $t = \infty$:

$$\frac{y}{x} = \frac{t-5}{(t-3)(t-1)} \cdot \frac{(t+1)(t-1)}{t+2}$$

$$= \frac{(t-5)(t+1)}{(t-3)(t+2)} = 1 \quad (\text{para } t = \infty).$$

Asíntotas.

1.° *Paralelas a los ejes:* $x = \infty$ para $t = -1$ (y finita), entonces $y = -\frac{3}{4}$.

En fin, $y = \infty$ para $t = +3$ (x finito), y $x = \frac{5}{8}$.

2.° *Oblicua:* Siendo infinitos x e y para $t = 1$, hallemos la pendiente m de la asíntota.

$$m = \frac{y}{x} = \frac{(1-5)(1+1)}{(1-3)(1+2)} = \frac{4}{3}.$$

La ordenada en el origen será

$$p = \lim (y - mx) = \lim \left[\frac{t-5}{(t-3)(t-1)} - \frac{4}{3}\frac{t+2}{(t-1)(t+1)}\right]$$

$$= \frac{(t-5)3(t+1) - 4(t+2)(t-3)}{3(t+1)(t-1)(t-3)}$$

$$= \frac{3t^2 - 12t - 15 - 4t^2 + 4t + 24}{D} = \frac{-t^2 - 8t + 9}{D}$$

$$- \frac{-(t-1)(t+9)}{3(t+1)(t-1)(t-3)} = \frac{-t-9}{3(t+1)(t-3)}$$

y, para $t = 1$, se obtiene $p = +\frac{5}{6}$.

La ecuación de la asíntota es, pues,

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}.$$

Máximos y mínimos. — Calculemos, en primer lugar, las derivadas parciales:

$$y_t' = \frac{(t-3)(t-1)-(t-5)(2t-4)}{(t-3)^2(t-1)^2} = \frac{-t^2+10t-17}{D}$$

$$x_t' = \frac{(t^2-1)-(t+2)2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2-4t-1}{(t^2-1)^2}.$$

Se tendrá:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

$$= \frac{-t^2+10t-17}{(t-3)^2(t-1)^2} \cdot \frac{(t+1)^2(t-1)^2}{-t^2-4t-1}$$

$$= -\frac{(-t^2+10t-17)(t+1)^2}{(t-3)^2(t^2+4t+1)}$$

Esta derivada será nula para el valor máximo de y, e infinita para el máximo de x, o sea

$y' = 0$ para $-t^2+10t-17=0$, de donde $t = 2{,}2$ y $7{,}8$
$y' = \infty$ para $t^2+4t+1=0$, de donde $t = -3{,}7$ y $-0{,}3$

el valor $t = 3$ queda excluido, pues $y = \infty$, sucediendo lo mismo para $t = -1$, porque $x = \infty$.

En resumen, se tendrá la tabla siguiente:

t	$-\infty$	$-3{,}7$	-2	-1	$-0{,}3$	0	1	$2{,}2$	3	5	$7{,}8$	$+\infty$
x	0	$-\frac{2}{15}$	0	$\pm\infty$	$-\frac{28}{15}$	-2	$\mp\infty$	$1{,}1$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{10}{61}$	0
y	0	$-\frac{9}{32}$	$-\frac{7}{15}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{84}{60}$	$-\frac{5}{3}$	$\mp\infty$	3	$\pm\infty$	0	$\frac{3}{35}$	0
y_x'	1	∞			∞		$\frac{4}{3}$	0			0	1

que nos da la curva de la figura 139.

3.° Trazar la curva llamada *folium de Descartes*

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

— Escribamos

$$y = tx,$$

la ecuación se transforma

$$x^3(1 + t^3) - 3atx^2 = 0$$
$$x(1 + t^3) - 3at = 0$$

de donde la ecuación paramétrica es

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}. \end{array} \right.$$

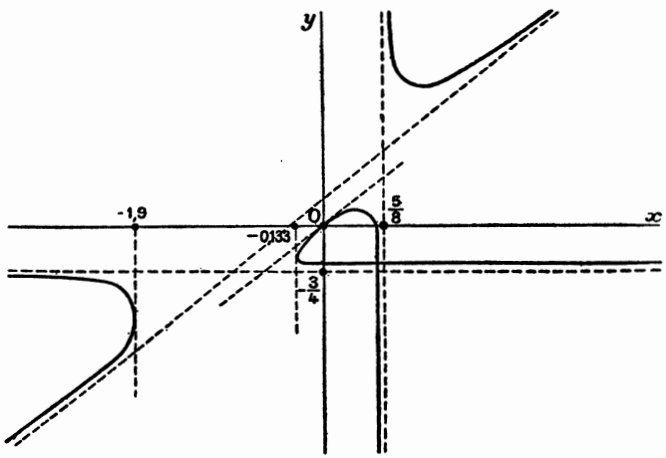

FIG. 139

Para $t = 0$, $y = x = 0$, la curva pasa por el origen, siendo la pendiente de la tangente en el origen

$$\frac{y}{x} = t = 0$$

y la curva es tangente al eje de las x.

La curva es simétrica con relación a la primera bisectriz ($\alpha = 45°$), porque sustituyendo x por y e y por x, la ecuación (1) no varía. Resulta, pues, que la curva es también tangente al eje de las y.

Asíntotas. — x e y son infinitos, a la vez, para

$$1 + t^3 = 0$$

o sea

$$(1 + t)(1 - t + t^2) = 0,$$

ecuación que sólo tiene una raíz $t = -1$.

La pendiente de la asíntota será

$$m = \lim \frac{y}{x \to \infty} = t$$

que, para $t = -1$, da $m = -1$. Por consiguiente, la asíntota oblicua es paralela a la segunda bisectriz. Hallemos su ordenada en el origen haciendo $t = -1$.

$$p = \lim (y - mx) = \lim (y + x)$$

$$= \frac{3at^2}{1 + t^3} + \frac{3at}{1 + t^3} = \frac{3at(t + 1)}{(t + 1)(1 - t + t^2)}$$

$$= \frac{3at}{t^2 - t + 1} = \frac{-3a}{3}$$

$$= -a.$$

La ecuación de la asíntota es, pues,

$$y = -x - a.$$

Máximo y mínimo. — Tenemos

$$y_t' = \frac{(1 + t^3)6at - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1 + t^3)^2} = \frac{3at(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}$$

$$x_t' = \frac{(1 + t^3)3a - 3at \cdot 3t^2}{(1 + t^3)^2} = \frac{3a(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2}$$

de donde

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3at(2 - t^3)}{3a(1 - 2t^3)} = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3}$$

que es nula para $t = 0$ y $t = 2^{1/3} = 1{,}25$,

e infinita para $t = \infty$ y $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 0{,}8$.

Puntos particulares. — Para $t = 0$, $y = x = 0$, igualmente para $t = \infty$,

para $t = 2^{1/3}$, se tiene $x = 1{,}25a$ e $y = 1{,}6a$,

para $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$ es la inversa.

Por último, se puede construir la tabla:

t	$-\infty$	-1	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$	1	$2^{1/3}$	$+\infty$
x	0	$-\infty$	0	$1{,}6a$	$\frac{3a}{2}$	$1{,}25a$	0
y	0	$+\infty$ ↘	0 ↗	$1{,}25a$ ↗	$\frac{3a}{2}$	$1{,}6a$	0
y'	∞	-1	0	∞	-1	0	∞

Para $-1 < t < 1$, se obtiene la rama de curva ABOCDM de la figura 140. Trazando la curva simétrica con relación a la bisectriz T', se obtiene la curva completa, llamada *Folium de Descartes*.

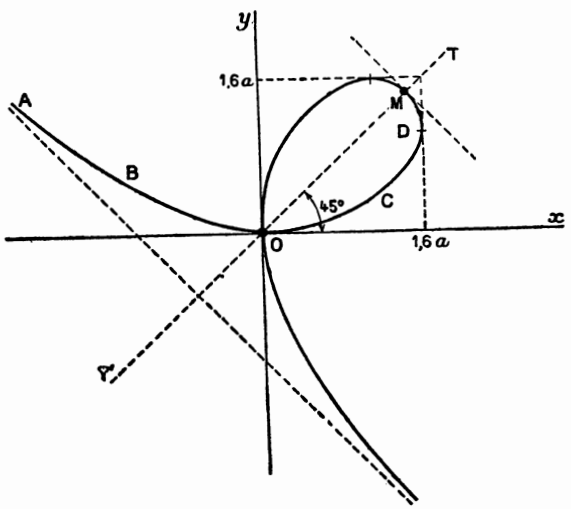

FIG. 140

4.° Trazar la curva

$$x = \frac{t}{t^2 - 1}$$

$$y = \frac{t^3}{t - 1}.$$

— Carece de simetría, y se hará variar t de $-\infty$ a $+\infty$.

Puntos particulares: $x = \infty$ para $t = 1$ y $t = -1$

$y = \infty$ para $t = 1$ $t = \infty$.

Para $t = -1$, $y = -\frac{1}{2}$ y $x = \infty$.

Por último, $x = y = 0$ para $t = 0$, y la curva pasa por el origen.

Asíntotas.

1.° *Paralela a* Oy: $y = \infty$ para $t = 1$ y $t = \infty$,

de donde

$$x = \infty \quad \text{y} \quad x = 0,$$

no existiendo, por tanto, más que una sola asíntota vertical para $x = 0$.

Sentido de la curva. — Hallemos el signo de y para $t = \infty$

$$y = \frac{t^2}{t - 1} \simeq \frac{t^3}{t} = t,$$

que es positivo para $t = +\infty$, y negativo para $t = -\infty$.

Lado en que está situada la curva. — Busquemos el signo de x:

$$x = \frac{t}{t^2 - 1} \simeq \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} = 0$$

luego, si $t > 0$, $x > 0$, y si $t < 0$, $x < 0$.

2.° *Paralela a* Ox:

$x = \infty$ para $t = 1$, y en este caso $y = \infty$,

y

$= \infty$ para $t = -1$, y en este caso $y = -\frac{1}{2}$,

luego sólo existe una asíntota horizontal con $y = -\frac{1}{2}$.

Sentido de la curva. — Busquemos el signo de x para $t \simeq -1$, haciendo $t = -1 + \varepsilon$:

$$x = \frac{-1+\varepsilon}{(-1+\varepsilon)^2-1} \simeq \frac{-1}{-2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}$$

luego

si $\varepsilon > 0$ $(t > -1)$, x es positivo
si $\varepsilon < 0$ $(t < -1)$, x es negativo.

Lado en que está situada la curva. — Estudiemos los signos de y haciendo $t = -1 + \varepsilon$, o bien el signo de $y + \frac{1}{2}$:

$$y + \frac{1}{2} = \frac{t^2}{t-1} + \frac{1}{2} = \frac{2t^2+t-1}{2(t-1)} = \frac{2(-1+\varepsilon)^2 + (-1+\varepsilon) - 1}{2(-1+\varepsilon-1)}$$

$$= \frac{2\varepsilon^2 - 3\varepsilon}{-4+2\varepsilon} \simeq \frac{3\varepsilon}{4},$$

luego, si $\varepsilon > 0$ (o $t > -1$,) la curva se halla por encima de la asíntota.
si $\varepsilon < 0$ (o $t < -1$), la curva se encuentra por debajo.

3.° *Oblicua.* — Para $t = 1$, se tiene $x = y = \infty$; la pendiente de la asíntota oblicua es

$$m = \lim \frac{y}{x} = \frac{\frac{t^2}{t-1}}{\frac{t}{t^2-1}} = t(t+1) \to 2.$$

La ordenada en el origen

$$p = \lim (y - mx) = \frac{t^2}{t-1} - \frac{2t}{t^2-1}$$

$$= \frac{t^2(t+1) - 2t}{t^2-1} = \frac{t(t^2+t-2)}{t^2-1}$$

que para $t = 1$, da $\frac{0}{0}$, teniéndose, entonces,

$$\frac{N'}{D'} = \frac{3t^2+2t-2}{2t} = +\frac{3}{2},$$

luego, la ecuación de la asíntota es

$$y = 2x + \frac{3}{2}.$$

Sentido de la curva. — Busquemos el signo de x para $t \simeq 1$. Hagamos $t = 1 + \varepsilon$:

$$x = \frac{t}{t^3 - 1} = \frac{1 + \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^3 - 1} \simeq \frac{1}{2\varepsilon},$$

luego, $x > 0$ para $\varepsilon > 0$, y $x < 0$ para $\varepsilon < 0$.

Lado en que está situada la curva. — Hallemos el signo de

$$y - 2x - \frac{3}{2} = h.$$

Para $t = 1 + \varepsilon$, se tiene

$$y - 2x = \frac{t^3}{t-1} - \frac{2t}{t^2 - 1} = \frac{t^2(t+1) - 2t}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)(2 + \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)}{2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{3\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2\varepsilon + \varepsilon^2}$$

y

$$h = y - 2x - \frac{3}{2} = \frac{3\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{6\varepsilon + 8\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 6\varepsilon - 3\varepsilon^2}{4\varepsilon + 2\varepsilon^2},$$

y como ε es muy pequeño, se obtiene:

$$\simeq \frac{5\varepsilon^2}{4\varepsilon} = \frac{5}{4}\varepsilon$$

que será positivo si $\varepsilon > 0$, encontrándose la curva *por encima* de la asíntota, y si $\varepsilon <$ (luego $t < 1$), la curva estará por *debajo* de la asíntota.

Signos de x y de y. — El denominador de x, t^2-1, es negativo para $-1<t<1$, luego se obtiene la tabla siguiente:

t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
x	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	0

En cuanto a y: $y>0$ si $t>1$ e $y<0$ si $t<1$.

Calculemos y_x'. Se tiene

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

con

$$y_t' = \frac{(t-1)2t - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

$$x_t' = \frac{(t^2-1) - t2t}{t^2-1)^2} = \frac{-1-t^2}{(t^2-1)^2},$$

de donde

$$y_x' = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \cdot \frac{(t^2-1)^2}{-1-t^2} = -\frac{t(t-2)(t+1)^2}{1+t^2}$$

que se anula para $t=0$, $t=2$, $t=-1$: la tangente es, por tanto, horizontal para estos tres valores, que dan

para $t=0$, $x=0$, $y=0$

para $t=2$, $x=\frac{2}{3}$, $y=4$

} donde y' se anula cambiando de signo.

para $t=-1$, $x=\infty$, $y=-\frac{1}{2}$.

Esta derivada es infinita para $t=\infty$, es decir, para $x=0$, y entonces el eje de las y es una asíntota vertical.

Se obtiene así la tabla siguiente, y la curva de la figura 141.

t	$\begin{matrix}-\\ \infty\end{matrix}$		-1		0		$+1$		$+2$		$\begin{matrix}+\\ \infty\end{matrix}$
x	0	$-$	$\begin{matrix}-\\ \infty\end{matrix}$ $\Big\vert$ $\begin{matrix}+\\ \infty\end{matrix}$		0		$\begin{matrix}-\\ \infty\end{matrix}$ $\Big\vert$ $\begin{matrix}+\\ \infty\end{matrix}$		$+\frac{2}{3}$	$+$	0
y'		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$\begin{matrix}-\\ \infty\end{matrix}$	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	$\begin{matrix}0\\ \text{máx.}\end{matrix}$	$-$	$\begin{matrix}-\\ \infty\end{matrix}$ $\Big\vert$ $\begin{matrix}+\\ \infty\end{matrix}$	$+$	$\begin{matrix}4\\ \text{mín.}\end{matrix}$	$+$	$\begin{matrix}+\\ \infty\end{matrix}$

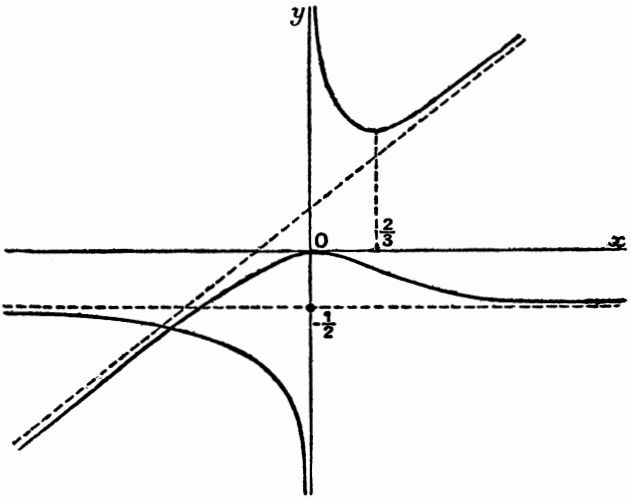

FIG. 141

CAPITULO XIV

ESTUDIO Y TRAZADO DE CURVAS DE FUNCIONES IMPLICITAS

124. Casos sencillos. — Son éstas las funciones más difíciles de estudiar. En primer lugar existen tres casos sencillos, que examinaremos a continuación.

Primer caso. — Por medio de transformaciones algebraicas, se puede expresar la función y en forma explícita, o sea

$$y = f(x)$$

la cual hemos estudiado ya.

Segundo caso. — La ecuación es de segundo grado, como máximo, y se puede escribir en la forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + K = 0,$$

que representa un cónica, habiendo realizado ya su estudio.

Tercer caso. — La ecuación

$$f(x, y) = 0$$

puede expresarse en la forma paramétrica siguiente

$$y = f(t) \qquad \text{y} \qquad x = \varphi(t),$$

estudio que acabamos de hacer, al considerar el caso del *Folium de Descartes*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

125. Caso general y marcha a seguir.

1.° *Simetrías.* — Si la ecuación de la curva $f(x, y) = 0$, no contiene más que potencias pares de y, no cambia al sustituir y por $-y$, y la curva es simétrica con relación al eje Ox; en este caso, sólo se estudiarán los valores positivos de y.

Si la ecuación de la curva no contiene más que potencias pares de x, no cambia al sustituir x por $-x$, siendo la curva simétrica con relación al eje Oy, y, entonces, no se estudiarán más que los valores positivos de x.

Si todos los términos de la ecuación tienen la misma paridad, la ecuación no cambia al sustituir x por $-x$ e y por $-y$, y la curva es simétrica con relación al origen O, siendo suficiente estudiar los valores positivos de x.

Así, por ejemplo, si la ecuación de la lemniscata, expresada en la forma

$$y^4 + 2y^2(x^2 + a^2) + x^4 - 2a^2x^2 = 0,$$

no tiene más que potencias pares de x y de y, la curva es simétrica con respecto a Ox, a Oy y al origen. No es estudiarían más que los valores positivos de x y de y.

2.° Se buscan los puntos singulares, tal como se ha hecho anteriormente.

3.° Se buscan las asíntotas, teniendo en cuenta los métodos y los ejemplos estudiados a este fin (ver capítulo de las asíntotas).

4.° Se hallan las tangentes en el origen si procede, y los máximos de x y de y.

5.° Se compone la tabla y se traza la curva.

Desgraciadamente, el estudio completo es muy complejo y exige conocimientos que no podemos ni abordar, ni siquiera tocar en este *Curso*, en particular la resolución e investigación de las raíces de las ecuaciones de grado superior a dos.

No obstante, examinaremos cuatro ejemplos.

126. Ejemplos.

1.° Escribamos de nuevo la ecuación estudiada anteriormente, en el capítulo de las «asíntotas» (ver fig. 56):

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

y expresémosla en forma entera

$$f(x, y) = y^2(x-1) - x^3 = 0. \qquad (1)$$

Es realmente instructivo estudiar la misma curva expresada en dos formas diferentes.

Las direcciones asintóticas se obtienen al anular los términos de grado mayor.

$$y^2x - x^3 = 0,$$

1.° $x = 0$, que corresponde a la asíntota ya hallada $x - 1 = 0$.

2.°) $y^2 - x^2 = 0$, e $y = \pm x$, que son las dos bisectrices de los dos ejes.

Para determinar las ordenadas en el origen, sustituyamos x por 1 e y por m en la ecuación escrita en la forma

$$(xy^2 - x^3) - y^2 = 0$$

o sea

$$(m^3 - 1) - m^2 = 0,$$

y (teniendo en cuenta la fórmula (3) del capítulo de determinación de las asíntotas oblicuas, § 64), se tiene

$$\varphi_m(1, m) = m^3 - 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi_{m-1}(1, m) = -m^2,$$

de donde

$$\varphi'_m(1, m) = 2m.$$

Así, para el valor de p, se obtendrá:

$$p = -\frac{\varphi_{m-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)} = -\frac{-m^2}{2m} = \frac{m}{2}.$$

Las ecuaciones de las dos asíntotas oblicuas se encuentran entonces sustituyendo m por $+1$ y -1, es decir

$$y = x + \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -x - \frac{1}{2}.$$

La curva pasa por el origen, ya que para $x = 0$, $y = 0$.

Las tangentes en el origen se obtienen anulando los términos de grado inferior, o sea

$$y^2 = 0,$$

confundiéndose, por tanto, con el eje de las x.

Por otra parte, según la ecuación (1), y sólo existe si $x < 0$ o $x > 1$.

Las tangentes a la curva, paralelas al eje Ox, proporcionan los máximos y mínimos de ella, es decir, al anular f_x'

$$f_x' = y^2 - 3x^2 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad y = \pm x\sqrt{3},$$

obteniéndose las abscisas de los puntos de contacto de dichas tangentes, eliminando y entre esta última ecuación y la de la curva, lo que nos da

$$3x^2(x-1)-x^3=x^2(2x-3)=0,$$

de donde

$$x=0 \qquad \text{y} \qquad x=+\frac{3}{2}.$$

Así se obtiene la curva ya estudiada de la figura 56.

2.° *Sea el Folium de Descartes* (fig. 140):

$$y^3+x^3-3axy=0. \qquad (\text{con } a>0)$$

— Para $x=0$ se tiene $y=0$, y la curva pasa por el origen.

Las tangentes en el origen vienen dadas por

$$-3axy=0, \qquad \text{o sea} \qquad x=0 \qquad \text{e} \qquad y=0,$$

luego, el origen es un punto doble y los dos ejes son tangentes a la curva en dicho punto.

Si se sustituye x por y e y por x, la ecuación no cambia, pues la curva es simétrica con relación a la bisectriz de los dos ejes Ox y Oy.

Las direcciones asintóticas vienen dadas por

$$x^3+y^3=0$$

o, lo que es lo mismo, por

$$(x^2-xy+y^2)(x+y)=0.$$

El primer paréntesis da dos ecuaciones de segundo grado, una en x

$$x^2-xy+y^2=0$$

y la otra en y

$$y^2-xy+x^2=0$$

que no tienen raíces reales, obteniéndose

$$x+y=0, \qquad \text{de donde} \qquad y=-x \qquad (\text{donde } m=-1)$$

Hallemos la ordenada en el origen sustituyendo x por 1 e y por m, es decir

$$(m^3+1)-3am=0,$$

teniéndose así

$$\varphi_m(1,m)=m^3+1 \qquad \text{y} \qquad \varphi_{m-1}(1,m)=-3am,$$

de donde

$$\varphi'_m=3m^2,$$

lo que da

$$p = -\frac{\varphi_{m-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)} = -\frac{-3am}{3m^2} = \frac{a}{m},$$

y la ecuación de la asíntota oblicua es, entonces,

$$y = mx + p = -x + \frac{a}{-1} = -x - a.$$

Para conocer la posición de la curva con relación a la asíntota, sustituyamos, en la ecuación de aquélla, y por la ordenada de la asíntota, a la que sumaremos una cantidad infinitamente pequeña ε, es decir, por $-x - a + \varepsilon$. Deduciremos el valor de ε y estudiaremos su signo:

si ε es positivo, la curva se encuentra por encima de la asíntota.

si ε es negativo, la curva está situada por debajo de la asíntota.

De este modo se obtiene

$$(-x - a + \varepsilon)^3 + x^3 - 3ax(-x - a + \varepsilon) = 0$$

o bien

$$3\varepsilon x^2 + 3\varepsilon(a - \varepsilon)x - (a - \varepsilon)^3 = 0,$$

despreciando $3a\varepsilon x$ frente a $3\varepsilon x^2$, ya que $x \to \infty$, y $-\varepsilon$ frente a, resulta

$$3\varepsilon x^2 - a^3 = 0 \qquad \text{y} \qquad \varepsilon = \frac{a^3}{3x^2}$$

que siempre es positivo, luego la curva se encuentra siempre por encima de su asíntota.

Para hallar los máximos y mínimos de x, se estudia la ecuación de tercer grado

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

que tiene tres raíces reales si

$$0 < x < a\sqrt[3]{4},$$

siendo el máximo de x, $a\sqrt[3]{4}$.

Entonces, la derivada y'_x es

$$y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$$

e

$$y' = \infty \qquad \text{para} \qquad y^2 - ax = 0$$

$$y^2 - a(a\sqrt[3]{4}) = 0$$

de donde

$$y = a\sqrt[3]{2},$$

siendo en este punto la tangente vertical.

Análogamente, por haber simetría con relación a la primera bisectriz, se tendrá un máximo de y cuando $x = \sqrt[3]{2}$,

$$y_{max} = a\sqrt[3]{4}.$$

Se obtiene así la curva de la figura 140, ya estudiada.

3.°) *Sea la lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

— Podemos escribir

$$y^4 + 2y^2(x^2 + a^2) + (x^4 - 2a^2x^2) = 0,$$

ecuación bicuadrada en y, que tendrá dos raíces de signos contrarios si

$$x^4 - 2a^2x^2 \leqslant 0 \qquad \text{o bien} \qquad x^2(x^2 - 2a^2) \leqslant 0$$

expresión que da la condición

$$-a\sqrt{2} \leqslant x \leqslant a\sqrt{2}.$$

Tendremos así dos valores de y, uno positivo

$$y = \sqrt{-(x^2 + a^2) + \sqrt{4a^2x^2 + x^4}},$$

y otro negativo. Como el valor positivo de y no cambia si se transforma x en $-x$, basta estudiar los valores positivos de x. La curva se determinará por simetría, ya que existe con relación al eje de las x y al de las y.

Para $x = 0$ y $x = a\sqrt{2}$, se tiene $y = 0$.

Calculemos y'. Sin embargo, es más cómodo anular la derivada de y^2, lo que da

$$-2x + \frac{4a^2x}{\sqrt{4a^2x^2 + a^4}} = 0$$

de donde

$$x = a\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left(\text{en este momento } y = \frac{a}{2}\right).$$

y que corresponde a un máximo de y.

Así tendremos un primer arco de curva OMP.

Dibujando la curva simétrica con relación al eje de las x, y después del de las y, se obtiene la curva de *la lemniscata* (fig. 142).

— Hemos encontrado, anteriormente, que las ecuaciones de estas dos tangentes en el origen eran

$$y = +x \qquad \text{e} \qquad y = -x.$$

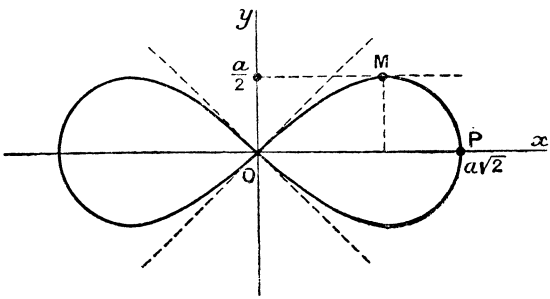

FIG. 142

4.° *Sea la función*

$$y^4 - x^4 - (2x - y)xy = 0.$$

— Las direcciones asintóticas vienen dadas por

$$y^4 - x^4 = 0 \qquad \text{o} \qquad (y^2 + x^2)(y^2 - x^2) = 0$$

o sea

$$y = \pm x$$

y las tangentes en el origen, por

$$(2x - y)xy = 0,$$

es decir

1.°) $x = 0$ (eje de las y),
2.°) $y = 0$ (eje de las x),
3.°) $y = 2x$.

Aplicando el método que se utilizó anteriormente, se vería que las asíntotas son

$$y = x + \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad y = -x + \frac{3}{4}.$$

Por otra parte, haciendo $y = tx$, se expresa la ecuación en forma paramétrica

$$y = tx \qquad x = \frac{t(2-t)}{t^4-1},$$

estudio que no extenderemos más.

5.° Construir la curva

$$x = e^{-t}\cos t$$
$$y = e^{-t}\operatorname{sen} t.$$

— Es cómodo el transformarla en coordenadas polares

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\operatorname{sen}\theta.$$

con

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\operatorname{sen}^2 t$$
$$= e^{-2t},$$

de donde

$$\rho = e^{-t}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las coordenadas polares, se tiene para el ángulo polar θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{e^{-t}\cos t} = \operatorname{tg} t$$

de donde

$$t = \theta,$$

y la ecuación polar de la curva es

$$\rho = e^{-\theta},$$

que es una espiral logarítmica que corta a los radios vectores que parten del polo bajo un ángulo α tal que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{\rho'} = -1$$

de donde $\alpha = 135°$.

CAPITULO XV

INVERSION, POLOS Y POLARES

127. Definición de inversión. — Tomemos un punto O y consideremos una curva cualquiera C, en la que elegiremos un punto A cualquiera (fig. 143).

Hallemos ahora un punto A′, tal que

$$OA' = \frac{1}{OA}$$

Si el punto A describe la curva C el punto A′ describirá una curva C′, que recibe el nombre de *curva inversa,* siendo O el polo de inversión. Esta operación se llama *inversión.*

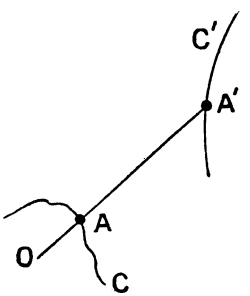

FIG. 143

— De aquí se deducen dos consecuencias:

1.° Si el punto A se aproxima al polo O, el punto A′ tiende hacia el infinito, e inversamente.

2.° Si C es un círculo de centro O y de radio 1, se deduce $OA' = \frac{OA}{1} = 1$, luego A′ coincide con A, siendo este punto, por consiguiente, fijo.

128. Estudio de las ecuaciones de la inversión. — Son dos ecuaciones que contienen las coordenadas de los dos puntos A y A′ de la inversión.

Es necesario que ambas ecuaciones satisfagan las condiciones siguientes:

1.° que $OA' = 1/OA$,

2.° que los tres puntos O, A y A′ estén alineados (fig. 144).

En la figura se ve que los triángulos OAB y OA′B′ son semejantes, lo que proporciona

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{OA}{OA'}. \qquad (1)$$

Por otra parte, la relación $OA' \cdot OA = 1$, da:

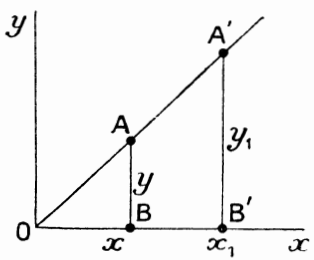

FIG. 144

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Pero, por la ecuación (1), se puede escribir:

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}}$$

que son las dos ecuaciones de la inversión.

129. Ejemplos.

1.° *Hallar la inversa de la recta* $3x + 5y = 1$.

— Sustituyendo x e y por los valores calculados anteriormente, se obtiene:

$$\frac{3x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{5y_1}{x_1^2 + y_1^2} = 1$$

o sea

$$3x_1 + 5y_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Suprimiendo los índices para generalizar y obtener la ecuación de la curva, se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$$

que representa la ecuación de una circunferencia, cuyos centro y radio son fáciles de determinar.

En resumen: la inversa de una recta que no pasa por el origen es un círculo, mientras que, la de una recta que pasa por el origen es también una recta, ya que en este caso los términos de segundo grado desaparecen.

2.° *Hallar la inversa de un círculo.*

Sea el círculo

$$y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

— Sustituyendo x e y por los valores hallados anteriormente, se obtiene:

$$\frac{y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{Dy_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)} + \frac{Ex_1^2}{(x_1^2 +)y_1^2} + F = 0,$$

o bien

$$\frac{1}{(x_1^2 + y_1^2)} + \frac{Dy + Ex}{(x_1^2 + y_1^2)} + F = 0,$$

Y suprimiendo los índices, para establecer la ecuación general de la curva, obtenemos:

$$Fy^2 + Fx^2 + Dy + Ex + 1 = 0,$$

que es la ecuación de un círculo (a menos que sea $F = 0$).

Pero, si **F** es nulo se tiene entonces una ecuación de primer grado, o sea, que la inversa es una recta.

130. Inversión de cónicas. — Estudiaremos solamente dos casos sencillos, ya que los demás se resolverán de la misma manera.

Primer caso. — Hipérbola equilátera.

Vamos a ver que cuando el polo de inversión es el centro de la hipérbola, la inversa es una lemniscata (pág. 32).

— En efecto, sea la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

La ecuación de la curva inversa será:

$$\frac{x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} - \frac{y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} = a^2$$

o bien

$$x_1^2 - y_1^2 = a^2(x_1^2 + y_1^2)^2.$$

Y suprimiendo los índices para obtener la ecuación general de la curva:

$$x^2 - y^2 = a^2(x^2 + y^2)^2$$

que es una lemniscata de Bernoulli (ver pág. 32).

Observación. Si el polo es un vértice de la hipérbola, la curva inversa será un *estrofoide,* cuya ecuación hemos establecido en la página 31).

Segundo caso. — Parábola.

La curva inversa es una *cisoide* (ver página 29).

En efecto, sea la parábola $y = 2px$.

Aplicando las dos ecuaciones de la inversión, se obtiene:

$$\frac{y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} = \frac{2px_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Suprimiendo los índices para establecer la ecuación general de la curva, y simplificando, tenemos:

$$x^3 = y^2\left(\frac{1}{2p} - x\right),$$

que es la ecuación de la cisoide, estudiada en la página 29 de este Tomo.

Observación. Se podría ver que la inversa de una cónica es una *cardioide,* cuando el polo de inversión es un foco.

Su ecuación es

$$a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + bx)^2,$$

o, en coordenadas polares:

$$\rho = a - b\cos\theta.$$

Generalización. — De los anteriores cálculos se deduce la proposición siguiente:

Si la inversa de una curva C *es otra* C', *ésta tiene por inversa a la curva* C.

— Se podría ver también, aunque la demostración es larga y complicada, en los ángulos formados por dos curvas que se cortan, son iguales a los ángulos formados por sus curvas inversas.

131. Inversa de un conjunto de rectas paralelas. — Es fácil ver que la inversa es un conjunto de círculos tangentes, cuyos centros se encuentran sobre una recta perpendicular al eje del conjunto.

— En efecto, tomemos una de estas rectas como eje de ordenadas (fig. 145 *a*). La ecuación de dichas rectas, designando por p una constante, es

$$x = p.$$

La curva inversa viene dada por la expresión:

$$\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} = p,$$

y la ecuación general de la curva es:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{p} = 0.$$

Que es la ecuación de un conjunto de círculos tangentes, todos ellos en O al eje y, y cuyos centros se encuentran sobre el eje de las x (fig. 145 *b*).

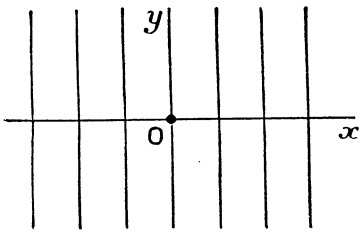

FIG. 145-*a*

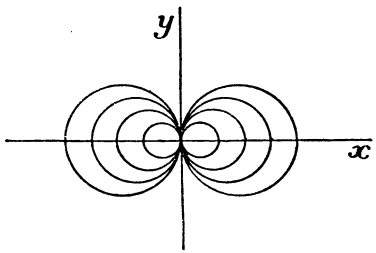

FIG. 145-*b*

POLOS Y POLARES

132. Caso de un círculo. Definición de la polar (fig. 146). — Consideremos un círculo cuyo centro se encuentra en el origen:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y un punto P cualquiera del plano, de coordenadas x_0 e y_0. Tracemos por el punto P las dos tangentes PA y PB al círculo: la recta AB que une los dos puntos de contacto se llama *polar,* y P *polo.*

Hallemos la ecuación de la polar AB. Llamando x_1y_1 a las coordenadas del punto A, y x_2y_2 a las del punto B.

Hemos visto, al estudiar el círculo, que la ecuación de la tangente en A era:

$$xx_1 + yy_1 = R^2,$$

pero, como esta recta pasa por P, se tendrá

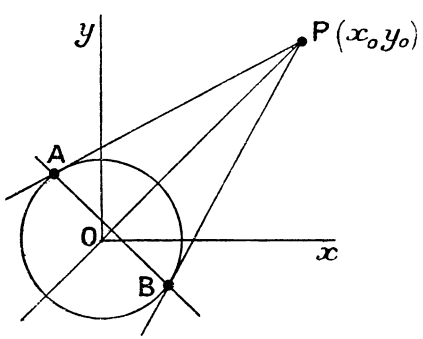

FIG. 146

$$x_0x_1 + y_0y_1 = R^2.$$

Si ahora consideramos la expresión

$$x_0x + y_0y = R^2,$$

observamos que es una recta, y que pasa por A y B, ya que a esta

ecuación verifican las coordenadas de los puntos A y B, luego *es la ecuación de la polar AB.*

Nótese que esta ecuación es la misma que la de la tangente al círculo, solo que aquí x_0 e y_0 son las coordenadas del polo. Y como $-y_0/x_0$ es la pendiente de esta recta, y x_0/y_0 la de la recta OP, resulta que la polar AB es perpendicular al diámetro OP que pasa por el polo.

— Para calcular las coordenadas de los puntos de contacto A y B, basta con resolver el sistema:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 \\ x_0 x + y_0 y = R^2, \end{array} \right.$$

La segunda ecuación proporciona y:

$$y = \frac{R^2}{y_0} - \frac{x_0}{y_0} x,$$

y sustituyendo en la primera se obtiene, una vez realizados todos los cálculos:

$$x = \frac{R^2 x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - R^2}}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Luego, si $x_0^2 + y_0^2 - R^2 > 0$, existen dos puntos de contacto; si esta cantidad es nula habrá uno solo (encontrándose P en el círculo), y si es negativa, no existirá ningún punto de contacto (P está en el círculo).

Ejemplos.

1.° *Sea la recta* $3x - 2y - 18 = 0$, *y la circunferencia* $x^2 + y^2 = 36$. *Hallar el polo de esa recta con relación al círculo.*

— Las coordenadas del polo se encuentran fácilmente:

$$x_0 = 6 \quad \text{e} \quad y_0 = -4.$$

2.° *Idem para la recta*

$$Ax + By + C = 0$$

y para la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

Se obtiene

$$x_0 = -\frac{AR^2}{C} \quad \text{e} \quad y_0 = -\frac{BR^2}{C}.$$

133. Polar de una cónica. — La definición es la misma que para el círculo, obteniéndose su ecuación de la misma manera.

Sea la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Designemos por x_1y_1 a las coordenadas del punto A de contacto con la cónica de una de las tangentes que salen del polo P. Hemos visto que la ecuación de dicha tangente es:

$$Ay_1y + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + Cx_1x + \frac{D}{2}(y_1 + y) + \frac{E}{2}(x_1 + x) + F = 0.$$

Como pasa por $P(x_0y_0)$ tendremos:

$$Ay_1y_0 + \frac{B}{2}(x_1y_0 + y_1x_0) + Cx_1x_0 + \frac{D}{2}(y_1 + y_0) + \frac{E}{2}(x_1 + x_0) + F = 0.$$

Pero si escribimos la ecuación igual que en el caso del círculo:

$$Ayy_0 + \frac{B}{2}(xy_0 + yx_0) + Cxx_0 + \frac{D}{2}(y + y_0) + \frac{E}{2}(x + x_0) + F = 0,$$

vemos que es una recta, y que pasa por el punto A en virtud de la ecuación anterior. Se vería también que pasa por el otro punto de contacto $B(x_2y_2)$, luego es la ecuación de la polar de la cónica; es análoga a la de la tangente, salvo que x_0 e y_0 son aquí las coordenadas del polo.

Ejemplos.

1.° *Sea el polo* P(8, 4) *y la elipse*

$$x^2 + 4y^2 = 16.$$

Hallar la ecuación de la polar, es decir, la ecuación de la recta que une los puntos de contacto de las dos tangentes.

— Aplicando la fórmula anterior obtenemos para la polar:

$$2y + x = 2.$$

2.° *Sea la cónica* $4x^2 - y^2 - 16 = 0$ *y la recta* $y + 14x - 8 = 0$. *Hallar las coordenadas del polo* P.

Se encuentra fácilmente que $x_0 = 7$ e $y_0 = -2$.

3.° *Sea la cónica*

$$y^2 + x^2 - 6x - 2y + 8 = 0.$$

Hallar la ecuación de la polar, estando el polo en el origen.

— Dicha polar es un círculo, de $R = 2$, siendo las coordenadas del centro $x = 3$ e $y = 1$.

La ecuación general de la polar es:

$$xx_0 + yy_0 - 3(x + x_0) - (y + y_0) + 8 = 0,$$

y como las coordenadas del polo son $(0, 0)$, la polar es:

$$-3x - y + 8 = 0.$$

CAPITULO XVI

ALGUNAS APLICACIONES FISICAS DE LAS CONICAS

Aunque esta obra sea un curso de Matemáticas, creemos puede ser interesante mostrar al lector algunas aplicaciones físicas de las cónicas, contrariamente a lo que se acostumbra hacer...

Si los físicos, mecánicos, electricistas, etc., se sirven de las matemáticas, ¿por qué no han de encontrar en un curso de éstas una aplicación en su campo?

Las vibraciones y la electrónica invaden en nuestra época todos los campos; nos parece, por tanto, útil e interesante que aquellos que estudian matemáticas superiores, puedan formarse una idea de algunas de las aplicaciones de las mismas a tales materias.

134. Composición de dos vibraciones perpendiculares. — Cuando existen dos vibraciones sinusoidales que actúan perpendicularmente entre sí, nos interesa conocer la naturaleza y propiedades de la vibración resultante.

— Se aplica esta teoría lo mismo a las masas materiales que a los haces de rayos catódicos observados en los oscilógrafos empleados en los modernos aparatos de electrónica, y, principalmente, en televisión.

En algunos de los casos siguientes, estas vibraciones tienen iguales o distintas amplitudes, e incluso están en fase o desfasados, pero el período es el mismo en todas.

Primer caso. — Sean dos vibraciones sinusoidales de amplitudes máximas iguales a a, que vibran en dos direcciones perpendiculares y en fase (es decir, nulas y máximas al mismo tiempo).

Sus amplitudes instantáneas vienen dadas por las expresiones

$$y = a \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

$$x = a \operatorname{sen} \omega t \tag{2}$$

siendo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, en donde T es le período.

Para obtener la amplitud resultante en la forma $y = f(x)$, basta eliminar el tiempo t, aplicando la fórmula

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1}$$

Las ecuaciones (1) y (2) nos dan

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{y}{a}$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

de donde

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = 1$$

$$y^2 = x^2 \qquad \text{de donde} \qquad y = \pm x,$$

que representa una recta que pasa por el origen, y cuya pendiente es $+1$ ó -1, lo que determina la dirección de la vibración resultante (fig. 147).

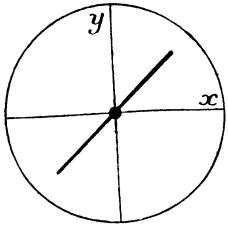

FIG. 147

— Si en un oscilógrafo se aplican a las placas deflectoras verticales una diferencia de potencial sinusoidal $x = a \operatorname{sen} \omega t$, y a las horizontales una d.d.p. $y = \operatorname{sen} \omega t$, se verá entonces sobre la pantalla una línea recta luminosa con una inclinación de 45° ó 135°.

Segundo caso. — Las dos vibraciones siguen estando en fase, pero de amplitudes máximas a y b:

$$x = a \operatorname{sen} \omega t$$
$$y = b \operatorname{sen} \omega t.$$

Se tendrá

$$\frac{2}{a^2} + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = 1$$

o sea

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \qquad \text{e} \qquad y = \pm \frac{b}{a} x,$$

que representa también una recta de pendiente $+\frac{b}{a}$ o $-\frac{b}{a}$.

Tercer caso. — Las dos vibraciones, de igual amplitud máxima a, están en cuadratura (es decir, desfasadas un cuarto de período):

$$x = a \operatorname{sen} \omega t$$
$$y = a \cos \omega t.$$

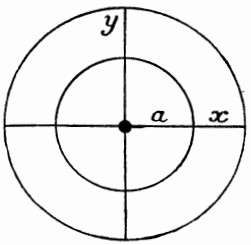

FIG. 148

Se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

o bien

$$x^2 + y^2 = a^2$$

que representa una circunferencia de radio a.
En la pantalla del osciló grafo se observaría una circunferencia (figura 148).

Cuarto caso. — Las dos vibraciones están en cuadratura, pero tienen amplitudes máximas diferentes:

$$x = a \operatorname{sen} \omega t$$
$$y = b \cos \omega t.$$

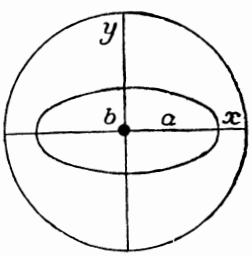

FIG. 149

Se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que representa una elipse cuyos ejes son $2a$ y $2b$, siendo horizontal el primero y vertical el segundo, y encontrándose su centro en el origen (fig. 149).

Quinto caso. — Las dos vibraciones tienen amplitudes máximas a y b, y desfasadas no más de $\frac{1}{4}$ de período, pero un tiempo θ cual-

$$x = a \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$
$$y = b \operatorname{sen} \omega(t - \theta)$$
$$= b \operatorname{sen} (\omega t - \omega\theta), \tag{2}$$

al ángulo $\omega\theta$ lo designaremos por φ.

Desarrollando la ecuación (2)

$$\frac{y}{b} = \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)$$
$$= \operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \omega t.$$

se deduce $\cos \omega t$

$$\cos \omega t = \frac{\operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \varphi - \dfrac{y}{b}}{\operatorname{sen} \varphi}$$

$$= \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{y}{b \operatorname{sen} \varphi}.$$

Se tendrá así

$$\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{y}{b \operatorname{sen} \varphi}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{y^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{2xy}{ab \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi}\right) + \frac{y^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{2xy}{ab \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi} = 1.$$

El primer paréntesis se reduce a $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$, y al multiplicar todos los términos por $\operatorname{sen}^2 \varphi$, se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy \cdot \cos \varphi}{ab} = \operatorname{sen}^2 \varphi$$

que escribiremos entonces

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy \cdot \cos \varphi}{ab} + \frac{x^2}{a^2} - \operatorname{sen}^2 \varphi = 0} \qquad (3)$$

expresión de la forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0$$

que representa una cónica.

Se tiene

$$B^2 - 4AC = \frac{4 \cos^2 \varphi}{a^2 b^2} - 4 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{4}{a^2 b^2}(\cos^2 \varphi - 1)$$

cantidad que es *siempre negativa*: la cónica es entonces una elipse. Pero la ecuación (3) nos dice que su centro se encuentra en el origen y que sus dos ejes están inclinados con relación a los de coordenadas (fig. 150).

Obsérvese que como B y F contienen al ángulo φ, el eje mayor de la elipse tendrá una inclinación cuyo ángulo dependerá de φ, y, por consiguiente, haciendo variar a φ la elipse se pondrá a girar en uno u otro sentido. Inversamente, si la elipse permanece fija, el desfase de las dos vibraciones, o sea, el ángulo φ es constante.

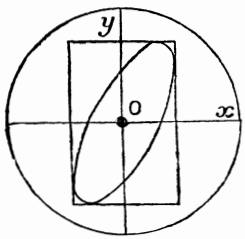

FIG. 150

135. Medida experimental del desfase. — Dada una elipse oblicua, obtenida, por ejemplo, sobre la pantalla de un oscilógrafo, vamos a ver que es posible medir experimentalmente el valor del desfase φ, que determinaremos por su seno.

Para ello, basta calcular la ordenada y_1 para $x = 0$, en el caso de la elipse vertical, la ordenada y_2 para $x = 0$ en el caso de la elipse oblicua, y, por último, hallar la relación

$$\frac{y_2}{y_1}$$

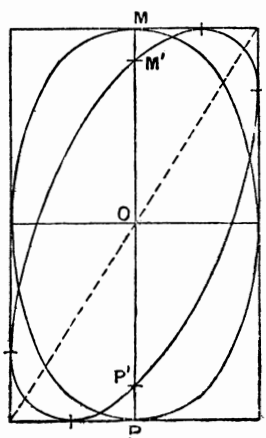

FIG. 151

En efecto, cuando la elipse es vertical (4.° caso), y $x = 0$, se tiene

$$y_1 = b.$$

Cuando la elipse es oblicua (5.° caso), se tiene

$$x = a \operatorname{sen} \omega t$$
$$y = b \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)$$
$$= b \, (\operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \omega t);$$

entonces, cuando

$$x = 0, \quad \operatorname{sen} \omega t = 0 \quad (\text{y } \cos \omega t = 1),$$

se obtiene

$$y_2 = - b \operatorname{sen} \varphi$$

y salvo el signo

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \operatorname{sen} \varphi}{b} = \operatorname{sen} \varphi.$$

Basta, pues, medir en la figura 151 las longitudes OM′ y OM, y establecer la relación

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{OM'}{OM} = \frac{P'M'}{PM},$$

lo que se consigue con facilidad al colocar sobre la pantalla del oscilógrafo otra transparente graduada en milímetros.

136. Interferencia de dos vibraciones. — Consideremos, para concretar ideas, la superficie tranquila de un lago, y dos fuentes vibratorias separadas entre sí una longitud l y del mismo período que actúan sobre la superficie del agua comunicándole elongaciones sinusoidales.

Tomemos, para simplificar, dos fuentes vibratorias en fase, que producen cada una de ellas una amplitud, cuyo valor instantáneo es

$$y = a \cdot \operatorname{sen} \omega t = a \cdot \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$$

en donde T es el período (fig. 152).

Estudiemos el estado vibratorio de la superficie del agua, teniendo en cuenta que un punto cualquiera de dicha superficie recibe en cada instante las vibraciones de las dos fuentes: tales vibraciones se *interferirán,* es decir, se compondrán. En efecto, es evidente que un vientre que proceda de S_1, en un lugar determinado, se combinará con otro que venga de S_2, para producir un doble vientre, o bien que un seno originado en S_1 se suma a otro procedente de S_2, para formar uno doble, o, también, que un vientre producido en S_1 se sumará a un seno originado en S_2, en cuyo caso la amplitud resultante será nula, y el agua permanecerá inmóvil en este último punto.

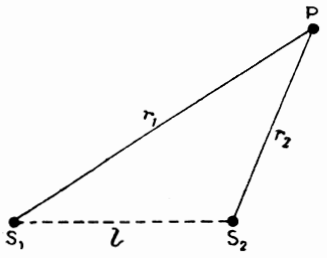

FIG. 152

— Entonces, vamos a calcular la amplitud resultante en un punto P cualquiera (fig. 152), a la distancia r_1 y r_2 de las dos fuentes. Pero, puesto que es necesario sumar algebraicamente las amplitudes de las dos vibraciones *en el mismo instante,* calcularemos, en primer lugar, la amplitud de una vibración cualquiera a la distancia x de una fuente vibratoria, suponiendo la amortiguación nula.

Sea V la velocidad de propagación de la onda, y θ el tiempo que ésta tarda en recorrer la distancia x; se tiene

$$x = V \cdot \theta.$$

Hallemos, entonces, cuál es la amplitud de la vibración a la distancia x de la fuente, y la que hay en la fuente *en este instante*: ahora bien, puesto que esta vibración procede de la fuente, *su amplitud será la misma que la que existiría en aquélla en un instante* θ *anterior* (no en un tiempo posterior). Por ejemplo, diez segundos o un minuto antes. Por lo tanto, la amplitud será

$$y_x = a \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t - \theta) = a \cdot \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

$$= a \cdot \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{TV}\right),$$

pero VT es, por *definición*, la longitud de onda λ, o sea, la distancia recorrida en el tiempo de un período, luego:

$$\lambda = VT,$$

de donde

$$\boxed{y_x = a \cdot \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$$

Esta fórmula general se aplica a todas las vibraciones que se propagan.

Usémosla para calcular la amplitud de las dos vibraciones que, partiendo *al mismo tiempo* de S_1 y de S_2, llegan a un punto P cualquiera. Dichas amplitudes serán:

la que parte de S_1

$$y_1 = a \cdot \operatorname{sen}\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right),$$

la que llega de S_2

$$y_2 = a \cdot \operatorname{sen}\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right).$$

La amplitud resultante es la suma algebraica

$$y = y_1 + y_2 = a \left[\operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right),\right.$$

dando el valor de y, en cada instante, el desnivel vertical con relación al nivel inicial del agua.

Transformemos esta suma de dos senos en producto, aplicando las fórmulas de transformación, ya conocidas de trigonometría, obteniendo

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cdot \cos \pi \frac{(r_1 - r_2)}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \left[\frac{t}{T} - \left(\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \right],$$

que es una función con tres variables: t, r_1 y r_2.

— Para estudiar el estado vibratorio en la superficie del agua, *consideremos el instante en que la vibración pasa por su amplitud máxima:* en dicho instante el término en seno, que es el único función de t, es igual a 1, que corresponde a su valor máximo, y resulta

$$\boxed{Y = 2a \cdot \cos \pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}}$$

Discusión:

1.° Hallemos el lugar geométrico de los puntos en que la amplitud es máxima, y que se llaman *vientres* de vibración: en dichos puntos

$$\cos \pi \left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) = \pm 1,$$

o sea

$$\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) = K\pi$$

en donde

$$K = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

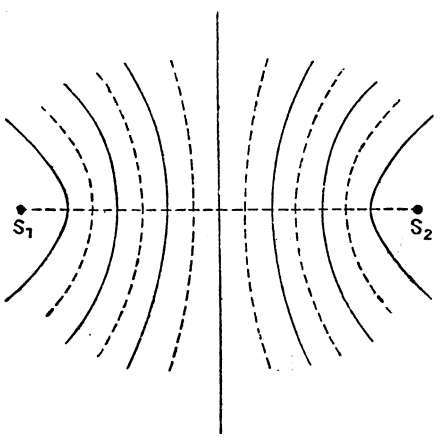

FIG. 153

Para $K = 0$, $r_1 - r_2 = 0$, o $r_1 = r_2$, luego la recta es perpendicular a S_1S_2 en su punto medio.

Para $K = 1$, $r_1 - r_2 = \lambda$, y el lugar de estos puntos, cuya diferencia de distancias a S_1 y a S_2 es constante, es una *hipérbola*, de focos S_1 y S_2.

Para $K = 2$, $r_1 - r_2 = 2\lambda$, y se obtiene una *segunda hipérbola* de iguales focos.

Para $K = 3$, $r_1 - r_2 = 3\lambda$, obtenemos una tercera hipérbola, etc., lo que proporciona las hipérbolas de trazo lleno de la figura 153.

2.° Hallemos el lugar geométrico de los puntos en que la amplitud es nula, y que se llaman *nodos* de vibración: en estos puntos

$$\cos \pi \left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad \pi \left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = (2K + 1)\frac{\pi}{2}$$

es decir, un número impar de veces $\frac{\pi}{2}$. Se deduce

$$r_1 - r_2 = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Para $K = 0$, $r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2}$ y el lugar es una hipérbola de focos S_1 y S_2,

para $K = 1$, $r_1 - r_2 = 3\frac{\lambda}{2}$, se tiene una segunda hipérbola,

para $K = 2$, $r_1 - r_2 = 5\frac{\lambda}{2}$, se tiene una tercera hipérbola, etc.

Todas estas hipérbolas que se intercalan entre las precedentes se han dibujado en la figura por líneas de puntos.

— En resumen, se obtiene así todo un haz de hipérbolas.

El conjunto de nodos y de vientres producidos por la interferencia de las dos vibraciones procedentes de S_1 y S_2, reciben el nombre de *ondas estacionarias: sus posiciones son fijas en el espacio, pero sus amplitudes son variables con el tiempo.*

— En el tomo V, § 83, hemos estudiado ya un fenómeno análogo en relación con la electricidad, al examinar la propagación de una corriente eléctrica de alta frecuencia a lo largo de una línea: allí existía interferencia entre la onda directa y la onda reflejada por el extremo del hilo, con producción de nodos y de vientres de corriente.

— Indiquemos que en el teleguiado a distancia por radio de los aviones, por el sistema LORAN (o «*Long Range Navigation*»), se emplean tres antenas de emisión, de la misma λ, que emiten en fase. Cada grupo de dos antenas origina en el espacio un haz de hipérbolas, que se numeran, y sus puntos de intersección al ser conocidos por el avión gracias a sus números, le permiten conocer su posición *con gran exactitud.*

Esta es una de las más bellas aplicaciones de ... la geometría analítica.

137. Característica dinámica de una válvula de vacío. — Se llama *característica dinámica* de una válvula de vacío a la curva que indica las variaciones de la corriente de placa en función de las variaciones de la tensión de rejilla, cuando la válvula está cargada por una impedancia Z:

$$i_p = f(v_g).$$

Tomemos, por ejemplo, un triodo de Radio en el circuito de placa en el que se encuentra una impedancia de carga, que sirve de conexión con la válvula siguiente.

Cuando dicha impedancia es una resistencia pura, se demuestra que esta curva es una línea recta, pero vamos a ver que si la impedancia contiene una reactancia X, la curva es una *elipse*. Sean (fig. 154):

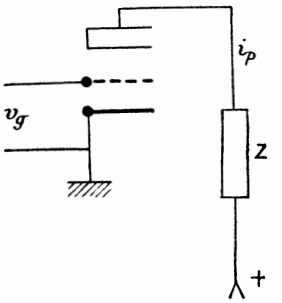

FIG. 154

R la parte óhmica de esta impedancia,

K el coeficiente de amplificación de la válvula,

ρ su resistencia interna.

Al aplicar a la rejilla una tensión sinusoidal

$$v_g = V_g \cdot \operatorname{sen} \omega t, \qquad (1)$$

se sabe que la corriente de placa instantánea, que está desfasada un ángulo φ de la tensión de rejilla, viene dada por la ley de KIRCHHOFF

$$i_p = \frac{KV_g \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)}{\sqrt{(R + \rho)^2 + X^2}} = \frac{KV_g \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)}{Z_c} \qquad (2)$$

Estas dos ecuaciones proporcionan la de la curva, expresada en forma paramétrica

$$v_g = f(t) \quad \text{y} \quad i_p = \varphi(t),$$

y para escribirla en la forma $i_p = f(v_g)$ basta eliminar t, escribiendo

$$\operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1.$$

La fórmula (1) da

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{v_g}{V_t},$$

y la (2)

$$i_p = \frac{KV_g}{Z_t} (\operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \omega t)$$

da $\cos \omega t$. El resto es exactamente el mismo que el efectuado en el

quinto caso de la primera aplicación, estudiado al principio de este capítulo, y se encuentra finalmente, al escribir $\text{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$:

$$v_g^2 - 2\frac{Z_t}{K}\cos\varphi \cdot v_g \cdot i_p + \frac{Z_t^2}{K^2} i_p - V_g^2 \,\text{sen}^2\varphi = 0$$

que es la ecuación de una cónica (en la que $v_g = x$ e $i_p = y$), y, como la cantidad

$$B^2 - 4AC = \frac{4Z_t^2 \cos^2\varphi}{K^2} - 4\frac{Z_t^2}{K^2} = \frac{4Z_f^2}{K^2}(\cos^2\varphi - 1)$$

es siempre negativa, se tiene una elipse (fig. 155).

— La corriente de placa no es, pues, proporcional a la tensión de rejilla, siendo esto una causa grave de deformación.

Se vería también que esta cónica es tanto más hinchada cuanto más grande sea la reactancia X.

Observación. — En realidad, en reposo, es decir, en ausencia de la tensión de rejilla, existe en la placa una corriente continua I_0 y, por ello, debíamos de haber escrito para el valor instantáneo de la corriente de placa

$$i_p = I_0 + I \,\text{sen}\,(\omega t - \varphi),$$

además, la rejilla de una válvula tal no se encuentra nunca a potencial cero, sino que existe siempre en ella una polarización estática negativa Vg_0 en ausencia de toda señal aplicada a la rejilla, y habríamos debido escribir para el valor instantáneo de la tensión de rejilla:

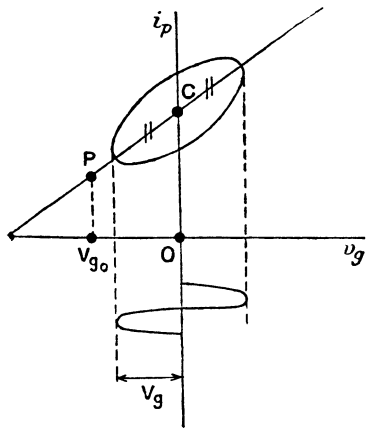

FIG. 155

$$v_g = V_{g0} + V_g \,\text{sen}\,\omega t,$$

pero los cálculos son mucho más largos y más complicados, sin que el resultado varíe: también se obtendría una elipse, cuyo centro estaría en el punto P en lugar de en el C.

138. Elipse de inercia. —Por ejemplo, en el estudio de la flexión y la rotura por flexión, en Mecánica y en Resistencia de materiales, hay que estudiar y utilizar la elipse de inercia. Por otra parte, es una aplicación de los momentos de inercia, que hemos examinado al principio del tomo IV de este Curso.

— Hagamos intervenir, primero, el llamado *radio de giro r*: si designamos por I el momento de inercia de una superficie S con relación a un eje cualquiera, el radio de giro r queda definido por la fórmula:

$$I = Sr^2 \qquad \text{de donde} \qquad r = \sqrt{\frac{I}{S}}$$

y todo ocurre como si toda la superficie, o la masa, estuvieran concentradas a la distancia r.

Consideremos, pues, en la figura 156, una superficie S cualquiera, y sea G su centro de gravedad. Tomemos un elemento de superficie dS, de coordenadas x e y con relación a dos ejes perpendiculares Ox y Oy que pasan por G, y elijamos un eje Oz cualquiera que pase también por G, e inclinado un ángulo α. Calculemos el momento de inercia de la superficie S con relación a este eje Oz. Se tiene, al ser h la distancia de dS a dicho eje

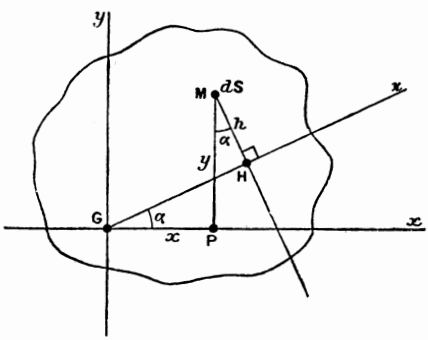

FIG. 156

$$I_z = \iint_S h^2 \cdot dS$$

Calculemos h. Para ello proyectemos la línea quebrada MPGH sobre la dirección MH, al considerar h como la resultante:

$$h = \sum \text{de las proy. de las componetes}$$
$$h = \text{pory. MP} + \text{proy. PG} + \text{proy. GH}$$
$$= y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha + 0.$$

Se tendrá entonces

$$I_z = \iint (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)^2 dS$$

$$= \cos^2 \alpha \iint y^2 \, dS + \operatorname{sen}^2 \alpha \iint x^2 \, dS - 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \iint xy \, dS$$

Llamando a la última integral *momento de inercia cuadrático* I_{xy} de la superficie S, se tendrá

$$I_z = \cos^2 \alpha \cdot I_x + \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot I_y - \operatorname{sen} 2\alpha \cdot I_{xy}. \qquad (1)$$

—*Puede verse ahora que* I_z *pasa por un máximo y un mínimo cuando el ángulo* α *varía*; en efecto, anulemos la derivada de I_z con relación a α:

$$-2\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot I_x + 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot I_y - 2\cos 2\alpha \cdot I_{xy} = 0$$

o bien

$$\operatorname{sen} 2\alpha(I_y - I_x) - 2\cos 2\alpha \cdot I_{xy} = 0$$

y

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \tag{2}$$

esta ecuación dará dos valores para el ángulo 2α que difieren entre sí π, y, por consiguiente, dos valores de α que difieren entre ellos $\frac{\pi}{2}$. De aquí se deduce que los dos ejes que corresponden a z_1 y z_2 son perpendiculares entre sí, y son *los ejes principales de inercia.*

Si $I_{xy} = 0$, y para ello basta elegir los dos ejes Ox y Oy, las raíces de la ecuación (2) son 0 y $\frac{\pi}{2}$, y los ejes Ox y Oy son los ejes principales de inercia.

La ecuación (1) se transforma entonces en la

$$I_z = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Haciendo intervenir los radios de giro, de manera que

$$I_z = S \cdot r^2, \quad I_x = S \cdot r^2_x \quad \text{e} \quad I_y = S \cdot r^2_y,$$

se obtiene, al dividir por S

$$r^2 = r^2_x \cdot \cos^2\alpha + r^2_y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Escribamos, por último

$$r_x = \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad r_y = \frac{1}{b},$$

de donde

$$r^2 = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}. \tag{3}$$

Si se traza la elipse (fig. 157)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y llamando ρ y α a las coordenadas polares de un punto P en donde el eje Ox corta a la elipse, se tiene

$$x = \rho \cos \alpha \qquad y = \rho \operatorname{sen} \alpha$$

y la ecuación de esta elipse es

$$\frac{\rho^2 \cos \alpha}{a^2} + \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{b^2} = 1$$

o bien

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{b^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

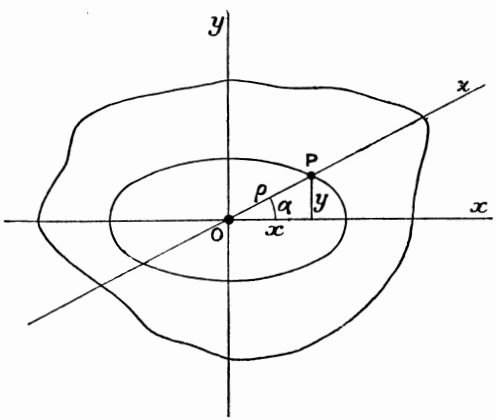

FIG. 157

Comparando esta ecuación con la ecuación (3), se tiene

$$r^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Así ,si se traza la elipse de inercia de una superficie plana, el radio de giro con relación a un eje cualquiera es el inverso del radio vector del punto en el que el eje corta a la elipse.

Fácilmente se puede observar que si Ox u Oy es un eje de simetría de la superficie, se tiene

$$I_{xy} = 0.$$

De aquí se deduce que todo eje de simetría es un eje principal de la elipse.

139. Otro método para hallar la elipse de inercia. — Dada la importancia de esta cuestión, tratemos este problema de la siguiente forma.

Estudiemos las variaciones del momento de inercia de una superficie S cuando el eje de los momentos gira alrededor de un punto O cualquiera (fig. 158).

Consideremos dos ejes de coordenadas Ox y Oy que pasan por el punto O, y sean α el ángulo formado por el eje variable con Ox y ds un elemento de la superficie, siendo r su distancia al eje Oz.

— Calculemos la expresión

$$\sum ds^2 = f(\alpha).$$

La ecuación del eje Ox es

$$y = Kx \quad (\text{con } K = \operatorname{tg}(\alpha))$$

o bien

$$y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

la distancia del elemento ds a este eje es por tanto (ver el capítulo en que se estudia la recta)

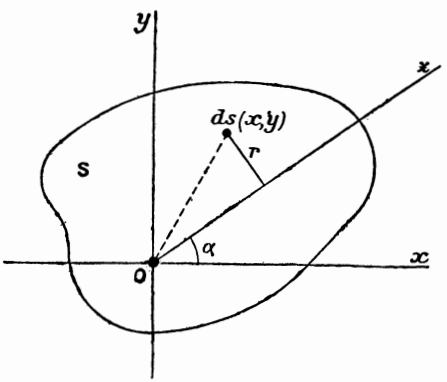

FIG. 158

$$r = \frac{x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} = x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha,$$

y el momento de inercia de la superficie S con relación al eje Oz es

$$I = \sum (x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha)^2 \cdot ds$$

$$= \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \sum ds\, x^2 + \cos^2 \alpha \cdot \sum ds\, y^2 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sum xy\, ds.$$

Hagamos

$$\sum y^2 ds = I_x = A, \quad \sum x^2 ds = I_y = C \quad \text{y} \quad \sum xy\, ds = I_{xy} = B$$

de donde

$$I_z = A \cos^2 \alpha - 2B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad (1)$$

siendo A, B y C constantes.

Estudiemos, pues, la función $I = f(\alpha)$.

Tracemos sobre el eje Oz un radio vector (fig. 159)

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I_z}} = OM$$

y hallemos el lugar del punto M, designando por X e Y sus coordenadas y observando que

$$X = \rho \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I_z}}$$

$$Y = \rho \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{I_z}}.$$

Si se sustituyen estos valores de sen α y cos α en la expresión de I_z de la ecuación (1), resulta:

$$I_z = AI_zX^2 - 2BI_zXY + CI_zY^2$$

o bien

$$\boxed{AX^2 - 2BXY + CY^2 = 1}$$

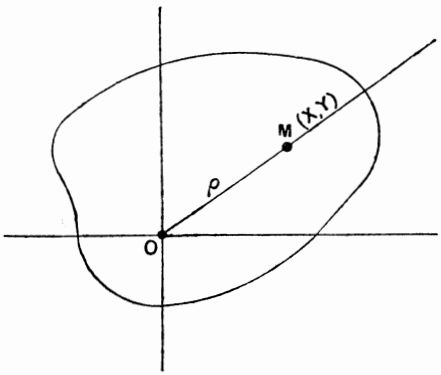

FIG. 159

que es la ecuación de una cónica que carece de puntos en el infinito, ya que $\rho = \frac{1}{\sqrt{I_z}}$ e I_z no son nunca nulos, pues son sumas de términos positivos.

Se tiene, pues, *una elipse*.

— Para que los ejes de coordenadas, tomados al azar, sean los ejes de la curva, es preciso que $B = 0$, es decir, $I_{xy} = 0$, siendo necesario entonces que la superficie S sea simétrica con relación a un eje, y para que éste sea un eje de simetría basta con que pase por el centro de gravedad de la superficie S.

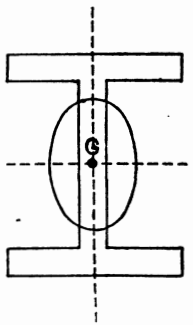

FIG. 160

Si se conoce y se puede trazar la elipse de inercia de una superficie, por ejemplo, de la sección de una viga (fig. 160), se puede hallar la dirección en que es máximo el momento de inercia, consideración de la mayor importancia en el caso de una viga que trabaje a flexión. En efeto, cuando se calcula el esfuerzo a que está sometido el metal, esfuerzo en kilogramos por milímetro cuadrado, es necesario conocer el momento de inercia con relación a un eje determinado, lo que es objeto de un largo estudio en Resistencia de Materiales, y en el cálculo de piezas para máquinas (ver los dos ejemplos en el tomo V, *Ecuaciones diferenciales,* párrafos 60 y 61).

— No insisteremos sobre esta cuestión fundamental en Mecánica y Resistencia de Materiales, pero hemos hecho referencia a ella ya que se presenta con frecuencia en el estudio de la flexión y de la rotura a flexión de vigas, así como en otro gran número de problemas.

RECAPITULACION

de las

FORMULAS DEL TOMO VI

Ecuaciones de algunas curvas.

Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} \qquad (\text{con } a^2 - c^2 = b^2).$$

Hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} \qquad (\text{con } c^2 - a^2 = b^2),$$

las dos asíntotas son

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Si $a = b$, se tiene una hipérbola equilátera:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2.$$

La hipérbola conjugada es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Parábola:

$$y^2 = 2px.$$

Cisoide:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \qquad (\text{con } x < 2a).$$

Estrofoide:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a + x}{a - x}} \qquad (\text{con } -a < x < a).$$

Lemniscata:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Cicloide:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = R\,(1 - \cos\theta), \end{cases}$$

o bien

$$x = R \operatorname{arc}\cos\frac{R - y}{R} \pm \sqrt{2Ry - y^2}.$$

Cambio de ejes de coordenadas.

a) *Cambio de origen:*

$$x = x_0 + X$$
$$y = y_0 + Y$$

en donde x_0 e y_0 son las coordenadas del nuevo origen O′ y X e Y las nuevas coordenadas del punto en el nuevo sistema del origen O′.

b) *Giro de ejes:*

Si α es el ángulo de rotación de los ejes, se tiene:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases}$$

de donde se deduce

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ Y = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Relación entre las coordenadas polares y las rectangulares:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \text{con} \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

Fórmula general de las cónicas.

$$x^2 + y^2 - e^2(x + p)^2 = 0$$

en donde p es la distancia del foco a la directriz.

Si $e = 0$, se tiene un círculo,
si $e = 1$, se tiene una parábola,
si $e < 1$, se tiene una elipse,
si $e > 1$, se tiene una hipérbola.

Distancia entre dos puntos $P_1(x_1\, y_1)$ y $P_2(x_2\, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

En coordenadas polares, se tiene

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Línea recta.

Hay tres tipos de *ecuaciones de la recta:*

1.º) $y = mx + p$ $\quad (m = \operatorname{tg} \alpha)$

2.º) $Ax + By = C$

3.º) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Angulo de dos rectas ($y = m_1x + p_1$ e $y = m_2x + p_2$):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$

1.º) Rectas paralelas: $m_1 = m_2$,

2.º Rectas parpendiculares: $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

Ecuación de una recta que pasa por un punto conocido $(x_0\, y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos $P_1(x_1\, y_1)$ y $P_2(x_2\, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Condición para que tres puntos estén alineados:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Distancia de un punto $P(x_0\, y_0)$ *a una recta:*

$$d = \frac{y_0 - mx_0 - p}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \text{si la recta es } y = mx + p,$$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \text{si la recta es } Ax + By = C.$$

Ecuación general de las rectas que pasan por el punto de intersección de dos rectas dadas D *y* D′:

$$D + KD' = 0 \qquad (K = \text{constante}).$$

Area de un triángulo (en función de las coordenadas de los tres vértices):

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Haz de dos rectas que pasan por el origen:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

Circunferencia.

1.º) El centro está en el origen

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

2.º) El centro tiene por coordenadas x_0 e y_0

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Eje radical de dos circunferencias.

Si las circunferencias son

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0, \end{cases}$$

el eje radical es

$$2x(a - a') + 2y(b - b') + (c - c') = 0.$$

Intersección de una circunferencia y de una recta.

Sea la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, y la recta $y = mx + p$.

La recta es tangente al círculo si

$$p = R\sqrt{1 + m^2}.$$

Si $R^2(1 + m^2) - p^2 > 0$, la recta la corta en dos puntos,

y si $$R^2(1 + m^2) - p^2 < 0,$$

la recta no la corta.

La tangente al círculo tiene por ecuación:

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

Potencia de un punto con relación a un círculo.

Si d es la distancia del punto al centro del círculo, se tiene

$$P = d^2 - R^2.$$

Tangentes y normales a una curva.

Tangente en un punto x_0, y_0:

$$(y - y_0) = f'_{x0}(x - x_0).$$

Caso en que la curva es de la forma $f(x, y) = 0$:

$$f'_{y_0} \cdot (y - y_0) + f'_{x_0} \cdot (x - x_0) = 0$$

Tangente al círculo $x^2 + y^2 = R^2$:

$$yy_0 + xx_0 = R^2$$

o bien

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2} \quad (m = \text{pendiente de la tangente}).$$

Tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

o bien

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Longitud de la subtangente a una curva:

$$l = -\frac{y}{y'}.$$

Ecuación de la normal a una curva (en un punto $x_0\, y_0$):

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$$

o

$$(y - y_0)f'_{x_0} - (x - x_0)f'_{y_0} = 0.$$

Longitud de la normal (del punto de la curva al eje de las x):

$$l = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Ecuación de la normal de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$acy - a^2x + c^3 = 0 \qquad \text{(donde } a^2 - c^2 = b^2\text{)}.$$

Longitud de la subnormal:

$$l = yy'.$$

Tangente a una curva en el origen.

La pendiente de esta tangente es:

$$m = \text{límite}\ \frac{y}{x \to 0}.$$

Punto de inflexión.

Primera condición: $y'' = 0$ (de donde se deduce x),

Segunda condición: y' no debe cambiar de signo a un lado o al otro de este valor de x.

Puntos singulares.

Sea la *curva* $f(x, y) = 0$.

Es necesario que la ecuación de segundo grado en $\frac{dy}{dy}$:

$$\frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

tenga dos o una raíz.

Asíntotas.

a) *Curva* $y = f(x)$.

La asíntota oblicua es $y = mx + p$

donde

$$\left|\begin{array}{l} m = \text{límite}\,\dfrac{y}{x \to \infty} \\ p = \text{límite}\,(y - mx) \end{array}\right. \qquad \text{para } x = \infty.$$

b) *Curva* $f(x, y) = 0$.

La pendiente m de las asíntotas se obtiene anulando los términos de grado mayor de la ecuación:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

p viene dada por

$$p = \frac{-Dm - E}{2Am + B}.$$

Generalización.

Sea la curva $f(x, y) = 0$.

a) *Asíntotas paralelas a los ejes:*

Se ordena la ecuación de la curva con relación a las potencias decrecientes de y (o de x), y se anula el coeficiente de la potencia mayor de y (o de x).

b) *Asíntotas oblicuas:*

Se hallan las raíces de la ecuación que se obtienen anulando los términos de grado mayor de la curva, después de hacer $x = 1$, y sustituir y por m (en donde $m = \lim \dfrac{y}{x}$ para $x = \infty$).

La asíntota es $y = mx + p$.

Determinación de la ordenada p en el origen: se tiene

$$p = -\frac{\varphi_{m-1}(1, m)}{\varphi'_m(1, m)}.$$

Cónicas.

Sea la ecuación $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$.

a) si $B^2 - 4AC < 0$, se tiene una *elipse*, o un punto,

b) si $B^2 - 4AC > 0$, se tiene una *hipérbola*, o dos rectas no paralelas.

c) si $B^2 - 4AC = 0$, se tiene una *parábola*, dos rectas paralelas, o bien una recta.

Asíntotas de la hipérbola:

$$y = \left(a + \frac{\sqrt{n}}{2A}\right)x + \left(b + \frac{p}{4A\sqrt{n}}\right)$$

e $$y = \left(a - \frac{\sqrt{n}}{2A}\right)x + \left(b - \frac{p}{4A\sqrt{n}}\right),$$

con $a = -\dfrac{B}{2n}$, $p = 2BD - 4AE$, $n = B^2 - 4AC$

El punto de intersección de las dos asíntotas se obtiene para $x = -\dfrac{p}{2n}$.

Hipérbola equilátera: se tiene $A = -C$.

La ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se transforma en la $x^2 - y^2 = a^2$, y la ecuación referida a sus asíntotas es:

$$XY = \frac{a^2}{2}.$$

La ecuación

$$XY = K^2 = \frac{c^2}{b} \qquad (\text{con } a^2 + b^2 = c^2)$$

es también la ecuación de una hipérbola *cualquiera* referida a sus asíntotas.

Centro de una cónica.

Cuando una cónica tiene su centro en el origen, su ecuación carece de términos de primer grado.

Coordenadas del centro.

Primer método:

$$x_0 = \frac{-BD + 2AE}{B^2 - 4AC}, \qquad y_0 = \frac{-BE + 2CD}{B^2 - 4AC}.$$

Segundo método: se anulan las derivadas parciales de la ecuación de la cónica, sustituyendo a continuación x por x_0, e y por y_0.

Reducción de la ecuación general de las cónicas.

Sea la cónica

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \qquad (1)$$

Si el centro x_0y_0 es el nuevo origen, se tiene:

$$x = x_0 + X, \qquad y = y_0 + Y,$$

y la cónica se transforma en la:

$$AY^2 + BXY + CX^2 + F_1 = 0$$

con

$$F_1 = \frac{Dy_0}{2} + \frac{Ex_0}{2} + F.$$

Giro de los ejes un ángulo α, tal que:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-B}{A-C},$$

la cónica se transforma en la

$$MY^2 + NX^2 + F_1 = 0$$

con

$$\left|\begin{array}{l} M = \dfrac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{B^2 + (A-C)^2}\right] \\ \\ N = \dfrac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{B^2 + (A-C)^2}\right], \end{array}\right.$$

y

si $B^2 - 4AC < 0$ (elipse), M y N tienen igual signo,
si $B^2 - 4AC > 0$ (hipérbola), M y N tienen signos contrarios.

Caso de la parábola. La ecuación se transforma en la:

$$MY^2 + RY + SX + F = 0 \qquad (\text{donde } M = A + C)$$

con

$$\left|\begin{array}{l} R = D\cos\alpha - E\operatorname{sen}\alpha \\ S = D\operatorname{sen}\alpha + E\cos\alpha, \end{array}\right.$$

donde

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{C}{A+C}} \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A}{A+C}},$$

siendo siempre $\cos\alpha$ de signo contrario a B.

— Las coordenadas del nuevo origen son:

$$y_0 = -\frac{R}{2M} \qquad \text{y} \qquad x_0 = \frac{R^2 - 4MF}{4MS},$$

y se obtiene la parábola

$$Y^2 = -\frac{SX}{M}.$$

Resumen general.

Si se transforma la ecuación (1) con relación a dos ejes paralelos a los ejes primitivos, siendo el origen $O'(x_0, y^3)$, la ecuación general de la cónica es:

$$AY^2 + BXY + CX^2 + Y \cdot f'_y(x_0, y_0) + X \cdot f'_x(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = 0.$$

Ecuación común a las tres cónicas:

$$Y^2 = 2pX + rX^2 \qquad (p > 0)$$

si $r > 0$, se tiene una hipérbola,
si $r < 0$, se tiene una elipse,
si $r = 0$, se tiene una parábola.

Para una elipse

$$a = -\frac{p}{r}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{-r}},$$

para una hipérbola

$$a = +\frac{p}{r}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{r}}.$$

Diámetro de una cónica. La ecuación del diámetro es:

$$m \cdot f'_y + f'_x = 0 \qquad (y = mx + p)$$

con

$$m = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D}.$$

Relación entre los coeficientes angulares del diámetro y de las cuerdas conjugadas:

$$2Amm' + B(m + m') + 2C = 0.$$

Angulo de dos diámetros conjugados:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Eje de las cónicas:

$$B \cdot f'^2_x - 2(C - A) f'_x \cdot f'_y - B \cdot f'^2_x = 0.$$

Ecuación general de la tangente a una cónica en el punto x_0, y_0:

$$2Ayy_0 + B(yx_0 + xy_0) + 2Cxx_0 + D(y + y_0) + E(x_0 + x_0) + 2F = 0$$

que se escribirá

$$y = mx + p.$$

Curvas en coordenadas polares $\rho = f(\theta)$.

Ecuación de la recta:

$$\rho = \frac{A}{B \operatorname{sen}\theta + C \cos\theta} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{M \operatorname{sen}\theta + N \cos\theta}.$$

Circunferencia:

1.°) el centro está en $P(x_0\, y_0)$, y se tiene

$$\rho^2 - 2\rho(x_0 \cos\theta + y_0 \operatorname{sen}\theta) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0.$$

2.°) el centro está en el origen:

$$\rho = R,$$

3.°) el centro está en el eje polar:

$$\rho = 2R \cos\theta,$$

4.°) el centro está en la perpendicular al eje polar, que pasa por el polo:

$$\rho = 2R \operatorname{sen}\theta.$$

Elipse:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \quad \text{o} \quad \frac{b^2}{a - c\cos\theta}$$

con

$$\frac{c}{a} = e \quad \text{y} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Parábola:

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}.$$

Hipérbola:

$$\rho = \frac{b^2}{a - c\cos\theta} = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

con

$$\frac{c}{a} = e \quad \text{y} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Fórmula general de las cónicas:

$$\rho = \frac{1}{1 - e\cos\theta}.$$

si $e = 1$, se tiene una parábola,
si $e < 1$, se tiene una elipse,
si $e > 1$, se tiene una hipérbola.

Tangente a una curva $\rho = f(\theta)$:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Espirales.

Espiral de Arquímedes: $\rho = a\theta$,

espiral hiperbólica: $\rho = \dfrac{a}{\theta}$,

espiral logarítmica: $\rho = ae^{\theta}$.

Caracol de Pascal: $\rho = a(1 - \cos\theta)$.

Otras curvas.

Rosetón de cuatro hojas: $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$.

Curvas paramétricas: $x = f(t)$ e $y = \varphi(t)$.

Recta.

a) Que pasa por el origen: $x = \alpha t, \quad y = \beta t.$

b) recta cualquiera:
$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t. \end{array} \right.$$

Circunferencia.

a) el centro está en el origen:
$$\left| \begin{array}{l} x = \mathrm{R}\cos\theta \\ y = \mathrm{R}\operatorname{sen}\theta. \end{array} \right.$$

b) el centro es (x_0, y_0):
$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + \mathrm{R}\cos\theta \\ y = y_0 + \mathrm{R}\operatorname{sen}\theta. \end{array} \right.$$

Parábola:

$$x = \frac{t^2}{2p}, \qquad y = t.$$

Elipse:

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\operatorname{sen}\theta.$$

Hipérbola:

$$x = \frac{a}{\cos\theta}, \qquad y = b\operatorname{tg}\theta.$$

Cicloide:

$$x = \mathrm{R}(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad y = \mathrm{R}(1 - \cos\theta).$$

Folium de Descartes:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

Característica dinámica de una válvula de vacío:

$$f(i_p, v_g) = v_g^2 - 2\frac{Z}{K}\cos\varphi \cdot v_g \cdot i_p + \frac{Z^2}{K^2} i_p^2 - V_g^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 0$$

que es una elipse (v_g en abscisas, e i_p en ordenadas), estando el centro sobre el eje de ordenadas, y escribiendo

$$v_g = V_g \cdot \operatorname{sen}\omega t.$$

Vibraciones perpendiculares (del mismo período).

a) Amplitudes máximas iguales y en fase: se tiene una recta oblicua, a 45°.

b) Amplitudes máximas diferentes, y en fase: se tiene una recta oblicua cualquiera.

c) Amplitudes máximas iguales, desfasadas $\frac{T}{4}$: se tiene una circunferencia.

d) Amplitudes máximas diferentes, desfasadas $\frac{T}{4}$: se tiene una elipse.

e) Amplitudes máximas diferentes, desfasadas un ángulo φ cualquiera: se tiene una elipse oblicua.

Interferencia de dos vibraciones del mismo período.

En un punto cualquiera la amplitud máxima es:

$$Y = 2a \cdot \cos\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)$$

lo que da un haz de hipérbolas.

Elipse de inercia:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

o bien

$$AX^2 - 2BXY + CY^2 = 1.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS A RESOLVER

CAPITULO PRIMERO

Generalidades - Coordenadas

Un cuadrado de lado $2a$ tiene su centro en el origen. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices en los casos siguientes:

1-1. *a*) si los lados son paralelos a los ejes,

1-2. *b*) si las diagonales coinciden con los ejes.

1-3. Construir el cuadrilátero de vértices.

$$(-2, 6),\ (-3, 0),\ (4, 0),\ (5, 1).$$

Un triángulo equilátero de lado a tiene su base sobre el eje de las x y el vértice opuesto está situado encima del eje de abscisas. Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo cuando:

1-4. *a*) la mitad de la base coincide con el origen,

1 5. *b*) el vértice izquierdo de la base coincide con el origen.

Hallar las proyecciones sobre los ejes y las longitudes de los segmentos de rectas que unen los puntos siguientes:

1-6. *a*) $(-4, -4)$ y $(1, 3)$.

1-7. *b*) $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

1-8. *c*) $(a + b, c + a)$ y $(c + a, b + c)$.

Hallar las proyecciones sobre los ejes de los lados de los dos triángulos siguientes:

1-9. *a*) $(1, 0),\ (-1, -5),\ (-1, -8)$.

1-10. *b*) $(a, b),\ (b, c),\ c, d)$.

1-11. Hallar las longitudes de los lados del triángulo de vértices

$$(2, 5),\ (-2, 6),\ (0, -5).$$

1-12. Demostrar que los puntos $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(5, 5)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

1-13. Demostrar que los puntos $(11, 2)$, $(6, -10)$, $(-6, -5)$, $(-1, 7)$ son los vértices de un cuadrado. Hallar su área.

1-14. Hallar el perímetro del triángulo de vértices

$$(a, b),\ (-a, b),\ (-a, -b).$$

1-15. ¿A qué ecuación satisfacen las coordenadas de un punto (x, y) si su distancia al punto $(7, -2)$ es igual a 11?

1-16. Hallar la ecuación que exprese algebraicamente que el punto (x, y) equidista de los puntos $(4, 5)$ y $(6, 7)$.

1-17. Formar la pendiente de la recta que une los puntos $(0, 3)$ y $(4, 6)$.

1-18. Hallar la pendiente de la recta que une los puntos $(a + b,\ c + a)$ y $(c + a,\ b + c)$.

1-19. Demostrar, por el cálculo de pendientes, que los puntos $(0, -2)$, $(4, 2)$, $(0, 6)$ y $(-4, 2)$ son los vértices de un rectángulo.

1-20. Hallar la pendiente de la recta que une los puntos $(-4, -2)$ y $(3, 2)$.

1-21. ¿Cuál es la inclinación de la recta, en grados, que une los puntos $(3, 0)$ y $(4, \sqrt{3})$.

1-22. Demostrar que los puntos $(b, c + a)$, $(c, a + b)$ y $(a, b + c)$ están alineados.

1-23. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos $(4, -6)$ y $(-2, -4)$.

1-24. Idem, para los puntos $(a + b, c + d)$ y $(a - b, d - c)$.

1-25. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo cualquiera se cortan en su punto medio.

1-26. ¿En qué razón divide el punto $(-2, 3)$ al segmento de recta que une los puntos $(-3, 5)$ y $(+4, -9)$?

1-27. Los puntos $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(6, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo.

Calcular las coordenadas de sus tres vértices.

1-28. Un cuadrilátero cualquiera tiene como vértices los puntos $(6, 8)$, $(-4, 0)$, $(-4, -6)$ y $(4, -4)$. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes forman un paralelogramo.

1-29. Hallar la proyección de la recta que une el origen y el punto $(5, 3)$ sobre otra que pasa por el punto $(5, 0)$ y de inclinación $45°$.

1-30. Hallar la proyección del segmento de recta que une los puntos $(-1, 3)$ y $(2, 4)$ sobre una recta cualquiera de inclinación $\frac{3\pi}{4}$.

1-31. Hallar la relación entre x e y que liga las coordenadas de un punto equidistante de los dos puntos $(-2, 0)$ y $(-3, 8)$.

1-32. Trazar la curva $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$. La ecuación se expresará en la forma $y = f(x)$.

Idem, para las curvas:

1-33. $x^2 + y^2 + 9x = 0$.

1-34. $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

1-35. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

1-36. $x = \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2}$.

1-37. $y = x^3 - x$.

1-38. $xy - 2y - 4 = 0$.

1-39. $x^2 = 4y$.

Demostrar que las siguientes ecuaciones no representan ningún lugar geométrico:

1-40. $(x + 1)^2 + y^2 + 4 = 0$.

1-41. $y^4 + 2x^2 + 4 = 0$.

1-42. $x^2 + 2xy + y^2 + 3 = 0$.

1-43. $y^2 + 4x^2 + 8x + 5 = 0$.

Hallar los puntos de intersección de las curvas siguientes:

1-44. $-7y + x + 25 = 0$ y $x^2 + y^2 = 25$.

1-45. $y^2 = 16x$ e $y = x$.

1-46. $x^2 - y^2 = 16$ y $x^2 = 8y$.

1-47. $x^2 + y^2 = 100$ e $y^2 = 9\dfrac{x}{2}$.

1-48. Hallar la longitud de la cuerda común a las curvas:

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \text{e} \quad y^2 = 3x + 3.$$

CAPITULO II

Transformación de coordenadas

2-1. Hallar la ecuación transformada de la $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ cuando se trasladan los ejes paralelamente a sí mismos, siendo el nuevo origen el punto $(3, -2)$.

Hallar las ecuaciones transformadas de las curvas siguientes, cuando los ejes se trasladan paralelamente a sí mismos, con el nuevo origen indicado:

2-2. $3x - 4y = 6$ y $P(2, 0)$.

2-3. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ y $P(2, 1)$.

2-4. $y^2 - 6x + 9 = 0$ y $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

2-5. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $P(-3, -2)$.

2-6. $y^2 - 2ax + a^2 = 0$ y $P\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

2-7. $x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 20 = 0$ y $P(-4, 3)$.

Hallar las ecuaciones transformadas de las curvas siguientes cuando se giran los ejes el ángulo indicado:

2-8. $x - y = 0$, $\alpha = 45°$.

2-9. $x^2 + 2xy + y^2 = 8$, $\alpha = 45°$.

2-10. $y^2 = 4x$, $\alpha = -90°$.

2-11. $x^2 + 4xy + y^2 = 16$, $\alpha = 45°$.

2-12. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y = 0$, $\alpha = -45°$.

Transformar y simplificar las ecuaciones siguientes al trasladar los ejes paralelamente a sí mismos:

2-13. $y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$.

2-14. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 1 = 0$.

2-15. $x^2 + 6x^2 + 12x - 4y + 4 = 0$.

2-16. $x^2 + 6x + 8 = 0$.

2-17. $x^2 - 4y + 8 = 0$.

2-18. $y^2 - 6x - 10y + 19 = 0$.

2-19. $y^3 + 8x - 40 = 0$.

2-20. $x^2 - y^2 + 14y - 49 = 0$.

2-21. $4x^2 - 4xy + y^2 - 40x + 20y + 99 = 0$.

Transformar las ecuaciones siguientes haciendo desaparecer el término xy por rotación de los ejes:

2-22. $x^2 + 4xy + y^2 - 4 = 0$.

2-23. $x^2 - 2xy + y^2 - 12 = 0$.

2-24. $xy - 18 = 0$.

2-25. $25y^2 + 14xy + 25x^2 = 0$.

2-26. $3y^2 - 10xy + 3x^2 = 0$.

2-27. $26y^2 + 20\sqrt{3}xy + 6x^2 = 0$.

2-28. $y^2 - 2xy + x^2 + 8y + 8x = 0$.

2-29. $41y^2 - 24xy + 34x^2 - 100 = 0$.

2-30. Hallar el punto al que se debe trasladar el origen para que los términos de primer grado de una ecuación de segundo grado desaparezcan.

Simplificar las ecuaciones siguientes:

2-31. $-9y^2 + x^2 - 36y - 2x + 4 = 0$.

2-32. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2-33. $4y^2 + x^2 - 16y - 8x = 0$.

2-34. $-4y^2 - 2xy - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Calcular las coordenadas del nuevo origen para que desaparezcan, en las ecuaciones siguientes, los términos en x y en y, permaneciendo los ejes paralelos:

2-35. $y^2 - 4y - x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 0$.

2-36. $25y^2 + 16x^2 + 64x - 150y - 111 = 0$.

2-37. Transformar la ecuación $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ con relación a nuevos ejes paralelos a los antiguos para que la nueva ecuación no contenga más que términos en y^2 y en x.

2-38. Demostrar que toda ecuación de la forma $ax + xy + by + c = 0$, se puede expresar en $xy = K$, eligiendo nuevos ejes paralelos a los antiguos, y calcular K.

2-39. Demostrar que toda ecuación de la forma

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0,$$

se puede expresar como $ax^2 + by^2 = K$, eligiendo nuevos ejes paralelos a los antiguos, y calcular K.

2-40. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los puntos (0, 2), (2, 0), (2, —2) al girar los ejes 60°?

2-41. Transformar la ecuación $-4y^2 + 15xy + 4x^2 - 24 = 0$ con relación a unos nuevos ejes que formen con los primeros un ángulo positivo igual a arc tg 3/5.

2-42. Transformar la ecuación $x^2 - y^2 = 49$ con relación a unos nuevos ejes que son bisectrices de los ángulos que forman los primeros.

CAPITULO III

La línea recta

Trazar las líneas rectas siguientes, escribiendo cada una bajo las dos otras formas:

3-1. $y = 5x - 1$.

3-2. $y = -4x + 100$.

3-3. $y = \frac{x}{5} - \frac{1}{4}$.

3-4. $3x + 4y = 1$.

3-5. $3x - 4y = 1$.

3-6. $-2x + 100y = \frac{1}{3}$.

3-7. $4x - 3y = 1.000$.

3-8. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = -1$.

3-9. $\frac{x}{10} - \frac{y}{3} = 100$.

3-10. $-\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -1.000$.

Hallar la pendiente de cada una de las rectas siguientes:

3-11. $2x + 100y = 5$.

3-12. $-5x + 22y = -4$.

3-13. $-\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = -100$.

3-14. $\frac{x}{b-a} + \frac{y}{b-c} = \frac{a}{c}$.

3-15. $-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{bc}=abc.$

3-16. Hallar los valores de a y b para los que las ecuaciones

$$2ax+2y-5=0 \quad \text{y} \quad 4x-3y+7b=0$$

representan la misma recta.

3-17 Probar que las rectas $5y+2x=8$ y $35x-14y=8$ son perpendiculares.

3-18. Hallar las ecuaciones de los lados del rectángulo de vértices:

$$(5,2),\ (5,5),\ (-2,2),\ (-2,5)$$

Sea un punto P situado sobre una recta $y=mx+p$. Hallar la ecuación de la recta si:

3-19. P está en $(-2,3)$ y $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3-20. P está en $(0,5)$ y $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3-21. P está en $(5,2)$ y $\alpha=60°$.

3-22. P está en $(3,-3\sqrt{3})$ y $\alpha=120°$.

3-23. P está en (a,b) y $\alpha=135°$.

3-24. P está en $(0,3)$ y $\alpha=150°$.

3-25. Probar que los tres puntos $(3,9)$, $(4,6)$ y $(5,5)$ se encuentran sobre la recta $3x+2y=25$.

Hallar el ángulo, expresado en grados, que forman entre sí las rectas siguientes:

3-26. $2x+3y=1$ e $y=5x+1$.

3-27. $-x-4y=5$ y $-x+4y=5$.

3-28. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ e $y=3x-100$.

3-29. $y=5x-1$ e $y=-5x-100$.

3-30. $y=-\frac{x}{1.000}-1$ y $4y-2x=0{,}01$.

Hallar la ecuación general de las perpendiculares a cada una de las rectas siguientes:

3-31. $y=\frac{x}{100}-1$.

3-32. $y=-5x-\frac{1}{100}$.

3-33. $4x-5y=-1$.

3-34. $\frac{x}{3}-\frac{y}{0{,}1}=10$.

3-35. $-10x-3y=1.000$.

Hallar la ecuación de la perpendicular a cada una de las rectas siguientes trazadas por el origen 0:

3-36. $y = -5x - 1$.

3-37. $y = -\frac{x}{5} - 100$.

3-38. $4x - 3y = \frac{1}{5}$.

3-39. $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0{,}1$.

3-40. $-5x - 5y = 1.000$.

3-41. $\frac{x}{0{,}01} - \frac{y}{0{,}001} = 10^6$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos siguientes:

3-42. $\begin{cases} P_1\ (3, -5) \\ P_2\ (-4, -10). \end{cases}$

3-43. $\begin{cases} P_3\ (-0{,}1, 100) \\ P_4\ (2, -0{,}5). \end{cases}$

3-44. $\begin{cases} P_5\ (1.000, -100) \\ P_6\ (-0{,}01, -0{,}001). \end{cases}$

3-45. $\begin{cases} P_7\ (0, 1.000) \\ P_8\ (-10, -1). \end{cases}$

Hallar la ecuación de las rectas que pasan por el punto:

3-46. $P_1\ (-1, -2)$ y es paralela a la recta $2x - 3y = 1$.

3-47. $P_2\ (4, 10)$ y es paralela a la recta $\frac{x}{0{,}1} + \frac{y}{0{,}2} = 10$.

3-48. $P_3\ (-1, +100)$ y es perpendicular a la recta $y = 5x - 1$.

3-49. $P_4\ (0, -10)$ y es perpendicular a la recta $\frac{y}{10} - \frac{x}{2} = \frac{1}{10}$.

3-50. $P_5\ (0, 1.000)$ y perpendicular a la recta $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{b+c} = abc$.

Hallar la ecuación de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:

3-51. Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(-3, 1)$.

3-52. Pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(-4, -3)$.

3-53. Pasa por el punto $(2, 3)$ y su pendiente es $m = -2$.

3-54. Corta a los ejes en los puntos $x = 2$ e $y = -5$.

3-55. Corta al eje de las x en el punto $(5, 0)$ y pasa por el punto $(0, -10)$.

Hallar la ecuación de la recta:

3-56. Perpendicular al eje de las x y que pase por el punto $(-2, 4)$.

3-57. Perpendicular al eje de las y y que pase por el punto $(-2, 4)$.

3-58. Paralela al eje de las x y que pase por el punto $(-2, 4)$.

3-59. Paralela al eje de las y y que pase por el punto $(-2, 4)$.

3-60. Sea la ecuación $3x + 4y = -20$. Calcular la distancia de esta recta al origen, y escribir la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta dada.

Hallar la ecuación de la perpendicular trazada en el punto medio del segmento de recta que une los puntos:

3-61. $P_1\,(3, 1)$ y $P_2\,(2, 4)$.

3-62. $P_3\,(0, 4)$ y $P_4\,(3, 0)$.

3-63. $P_5\,(2, 1)$ y $P_6\,(-3, -3)$.

3-64. Hallar la ecuación de las perpendiculares trazadas en los puntos medios de los lados del triángulo de vértices:

$$P_1\,(4, 8), \qquad P_2\,(10, 0), \qquad P_3\,(6, 2),$$

y demostrar que se cortan en el punto $P_4\,(11, 7)$.

Calcular la distancia de los puntos siguientes a la recta indicada, y decir si el punto se encuentra por encima o por debajo de ella:

3-65. $P_1\,(-2, 10)$ y $4x - 2y = -1$.

3-66. $P_2\,(0, 100)$ y $-4x - \dfrac{y}{5} = 0{,}1$.

3-67. $P_3\,(-10, -1)$ e $y = 10x - 0{,}1$.

Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto de intersección de las rectas:

3-68.
$$\begin{cases} 10x - y = -1 \\ 5x + 2y = 10, \text{ y por el punto } P_1\,(0, -5). \end{cases}$$

3-69.
$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{0{,}1} = 2 \\ 4y + 2x = 1, \text{ y por el punto } P_2\,(0, 100). \end{cases}$$

Escribir la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas:

3-70.
$$\begin{cases} 10x - y = 1 \\ y = 5x - 10. \end{cases}$$

3-71.
$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{2} = -4. \\ y = -2x - 5. \end{cases}$$

Hallar el ángulo que forman las rectas:

3-72. $y = 5x - 1$ y $4x - 1.000y = 0{,}1$.

3-73. $\dfrac{x}{0{,}1} - \dfrac{y}{20} = -0{,}5$ e $y = -0{,}1x + 10$.

3-74. $y = \dfrac{x}{100} + 100$ e $\dfrac{y}{2} + \dfrac{x}{0{,}01} = -20$.

Calcular el área del triángulo de vértices:

3-75. $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$.

3-76. $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2).

3-77. $(a, 1)$, $(0, b)$, $(c, 1)$.

3-78. (a, b), (b, a), $(c, -c)$.

3-79. Escribir la ecuación de la recta que pase por el punto de intersección de las rectas $3y - 2x = 0$ y $5y + 2x - 3 = 0$, y que sea paralela a la dirección 3/5.

3-80. Escribir la ecuación de la recta que pase por el punto de intersección de las rectas $3x - y + 5 = 0$ y $5x + 2y - 1 = 0$, y por el punto $(0, 2)$.

3-81. Calcular las longitudes de los lados de un triángulo de vértices $(2, 3)$, $(4, 5)$ y $(-3, -6)$.

3-82. Hallar la ecuación transformada de la recta

$$-4x - 6y + 24 = 0$$

cuando se traslada el origen al punto $(2, 3)$ permaneciendo los ejes paralelos

3-83. Demostrar que el área del triángulo de vértices:

$$(a, b + c), (b, c + a), (c, a + b)$$

es nula, y que los tres puntos están alineados.

3-84. Hallar el área del paralelogramo de vértices:

$$(0, 0), (5, 0), (9, 11), (4, 11).$$

3-85. Calcular el área del cuadrilátero de vértices:

$$(7, 0), (11, 9), (0, 5), (0, 0).$$

3-86. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes de coordenadas es constante e igual a 20.

3-87. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se desplazan, de tal manera que la diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $(3, 0)$ y $(0, -2)$ es constante e igual a 8.

Hallar las ecuaciones de las dos rectas que representan cada una de las ecuaciones siguientes:

3-88. $y^2 - 6y = 7$.

3-89. $xy - 2x^2 - 3x = 0$.

3-90. $x^2 - y^2 + x + y = 0$.

3-91. $3x^2 - 2xy - y^2 + 5x - 5y = 0$.

3-92. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5x - 10y + 6 = 0$.

3-93. $y^2 - 5xy + 6y = 0$.

3-94. a **3-99.** Hallar el ángulo que forman entre sí las rectas de los seis *ejercicios* anteriores.

3-100. Hallar el punto de la recta $3x - 5y + 6 = 0$ que equidista de los puntos $(3, -4)$ y $(2, 1)$.

3-101. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 6)$, y tal que el segmento comprendido entre los dos ejes sea dividido en partes iguales por ese punto.

3-102. Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

3-103. Demostrar que todas las rectas $y = mx + m$ pasan por un mismo punto y hallar sus coordenadas.

3-104. Demostrar que todas las rectas $Ay + Bx + C = 0$, para las que se verifica $A + B + C = 0$, pasan por un mismo punto, y hallar sus coordenadas.

3-105. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo formado por las tres rectas $2x - 3y + 120 = 0$, $x + y = 0$ y $3x + 4y = 6$.

3-106. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $Ay + Bx + C = 0$ y $A'y + B'x + C' = 0$ y por el origen.

3-107. Hallar la razón en que divide la recta $x + 3y = 6$ al segmento de recta que une los puntos $(-3, 2)$ y $(6, 1)$.

3-108. Calcular el valor de m para que la recta $y = mx - 7$ divida a la recta que une los puntos $(3, 2)$ y $(1,4)$ en la relación $\frac{3}{2}$.

3-109. Trazar la recta $3x - 4y + 5 = 0$ e indicar los puntos para los que se verifica $3x - 4y + 5 > 0$.

3-110. Idem, para la recta $-3x - 4y + 5 = 0$.

3-111. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(-5, -1)$ y que forma con el eje de las x un ángulo de 60°.

3-112. Hallar la ecuación de la recta paralela a $3y + x = 5$ y que pasa por el punto medio del segmento que une los puntos $(-2, -3)$ y $(5, 5)$.

3-113. Hallar la ecuación de la perpendicular trazada en el punto medio del segmento que une los puntos $(-5, -1)$ y $(-3, 4)$.

3-114. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $3x + 5y = 16$, $x - y = 0$ e $y + 3x = -4$. Calcular la distancia de cada vértice al lado opuesto.

3-115. Calcular el valor de m para que la recta $y = mx + 3$ pase por el punto de intersección de las rectas $y = 2x + 1$ e $y = x + 5$.

3-116. Un punto es equidistante de otros dos $(3, 2)$ y $(-3, 4)$, y la pendiente de la recta que le une con el origen es 3/5. Calcular las coordenadas de ese punto.

CAPITULO IV

Circunferencia

Escribir la ecuación de la circunferencia cuyo centro está situado en el punto:

4-1. $(2, 4)$ y de radio 3.

4-2. $(0, -10)$ y de radio 1.

4-3. $(-4, -5)$ y de radio 10.

4-4. $(-3, 4)$ y de radio 5.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

4-5. $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(-1, -4)$.

4-6. $(0, 1)$, $(0, 6)$, $(3, 0)$.

4-7. $(0, -3)$, $(4, 0)$, teniendo su centro sobre la recta $x + 2y = 0$.

4-8. $(4, 0)$, $(-2, 5)$, $(0, -3)$.

Hallar el radio y las coordenadas del centro de cada una de las circunferencias siguientes:

4-9. $5x^2 + 5y^2 + x + y = 0$.

4-10. $x^2 + y^2 - x - 1 = 0$.

4-11. $x^2 + y^2 + 4y - 2 = 0$.

4-12. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$.

4-13. $-x^2 - y^2 + \dfrac{10}{x} - 10y + 1 = 0$.

Hallar la ecuación de la circunferencia que:

4-14. tiene por centro $(2, 3)$ y pasa por el punto $(3, -2)$,

4-15. pasa por los puntos $(5, -3)$, $(0, 6)$ y su centro está situado en la recta $2x - 3y = 6$,

4-16. tiene por centro el punto $(-1, -5)$ y es tangente al eje de las x,

4-17. tiene por diámetro el segmento de recta que une los puntos $(3, 2)$ y $(-7, 4)$,

4-18. se circunscribe al triángulo formado por las tres rectas $x - 6 = 0$, $x + 2y = 0$ y $x - 2y = 8$,

4-19. se inscribe en el triángulo formado por las tres rectas $4x + 3y = 12$, $y - 2 = 0$ y $x - 10 = 0$.

4-20. ¿Para qué valor de a la expresión $(a + 6)x^2 + (a - 6)y^2 - 4x - 2ay + 10 = 0$ es un círculo?

Hallar la ecuación general de los círculos de radio igual a 4 y cuyos centros se encuentran:

4-21. sobre el eje de las x,

4-22. sobre el eje de las y.

4-23. Hallar los valores de a para que el círculo $x^2 + y^2 + 4ax - 2y + 4a = 0$ se reduzca a un punto.

Hallar las coordenadas de los puntos de intersección:

4-24. del círculo $x^2 + y^2 = 9$ con la recta $y = -4x + 2$,

4-25. del círculo $x^2 + y^2 = 16$ con la recta $y = 2x + 4$,

4-26. del círculo $x^2 + y^2 = 25$ con la recta $\frac{x}{10} + \frac{y}{15} = 1$.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de los dos círculos:

4-27. $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + 2x = 0$,

4-28. $x^2 + y^2 - 6x = 0$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección:

4-29. de los dos círculos: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x = 0, \text{ y por el punto } (3, 2). \end{cases}$

4-30. de los dos círculos: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0 \\ x^2 + y^2 = 4, \text{ y por el punto } (2, -2). \end{cases}$

Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de los dos círculos:

4-31. $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ y $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$,

cuyo centro está situado sobre la recta $4y + 2x = 1$.

Hallar los ejes radicales de los dos círculos:

4-32. $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

4-33. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ y $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$.

Calcular las coordenadas del centro y el radio de los círculos:

4-34. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,

4-35. $4x^2 + 4y^2 + 8y - 5 = 0$.

4-36. Hallar la ecuación de la recta que pase por los puntos de intersección de las circunferencias: $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

4-37. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen y son tangentes al círculo $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.

4-38. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(-4, -1)$ y cuyo centro está situado sobre la recta $3y + x = 18$.

4-39. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas

$$17x + y = 35 \text{ y } 11y + 13x = -50$$

y que tiene su centro sobre la recta $70y + 88x = -15$.

4-40. Hallar la ecuación del círculo que tiene como diámetro la porción de la recta $-4y + 3x = -12$, comprendida entre los dos ejes de coordenadas.

4-41. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo, de lados las rectas:

$$2y + x = 3, \quad -y + 3x = 2 \text{ y } -3y + 2x = 6.$$

4-42. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-2, 4)$ y $(-1, 3)$ y cuyo centro esté situado sobre la recta $-3y + 2x = -2$.

4-43. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $x - 2 = 0$ y $x - 6 = 0$ y cuyo centro está situado sobre la recta $y = 3x - 6$.

Calcular las longitudes de las tangentes trazadas desde el punto:

4-44. $(-1, 2)$ al círculo $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$,

4-45. $(5, 2)$ al círculo $x^2 + y^2 = 4$,

4-46. $(1, 2)$ al círculo $x^2 + y^2 = 25$.

4-47. Calcular el valor de λ para que la ecuación $Ay^2 + Cx^2 + \lambda(y^2 - m^2x^2) + 2(y - mx) = 0$ representa un círculo, conociendo A, C y m.

Calcular las coordenadas del centro de los círculos:

4-48. $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b} = R^2$.

4-49. $x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{b} = R^2$.

4-50. $100x^2 + \dfrac{y^2}{100} = R^2$.

CAPITULO V

Tangentes y normales

Puntos singulares

Hallar la ecuación de la tangente a la curva:

5-1. $y = x^2 - 5x + 6$, y pasando por el punto $(3, 0)$.

5-2. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, y pasando por el origen.

5-3. $y = 3x^2 - 1$, y pasando por el punto $(2, 2)$.

5-4. $x^2 + y^2 = 4$, y pasando por el punto $(5, 2)$.

5-5. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$, y pasando por el punto $(4, 0)$.

Hallar las pendientes de las tangentes siguientes en el punto de la curva (x_0, y_0):

5-6. $y^2 = 6x$.

5-7. $x^2 - y^2 = 4$.

5-8. $xy = a^2$.

5-9. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$.

5-10. Hallar la ecuación de la normal a la curva $x^3 - 8y = 0$ en el punto de abscisa $x_0 = +2$.

Hallar las ecuaciones de las tangentes y normales a las curvas siguientes en los puntos indicados de estas curvas:

5 11. $y^2 - 8x + 4y = 0$, y P $(0, 0)$.

5-12. $xy = 4$, y P $(2, 2)$.

5-13. $x^2 + 2xy - 4 = 0$, y P (x_0, y_0).

5-14. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, y P (x_0, y_0).

5-15. $x^2 - y^2 + x^3 = 0$, y P $(0, 0)$.

Hallar las ecuaciones de las tangentes a las curvas siguientes. trazadas por los puntos indicados (exteriores a las curva):

5-16. $x^2 + y^2 = 25$, y P $(7, -1)$.

5-17. $8y = x^3$, y P $(2, 0)$.

5-18. $2xy + y^2 = 8$, y P $(-8, 8)$.

5-19. $x^2 - 3y^2 + 2x + 19 = 0$, y P $(-1, 2)$.

5-20. Hallar las ecuaciones de las rectas que unen los puntos de contacto de las dos tangentes en los casos 16, 18 y 19 del problema anterior.

Hallar las ecuaciones de las tangentes en el origen de las curvas siguientes:

5-21. $xy - y^2 + x - 3y = 0$.

5-22. $x^2 + 4xy - 3x + 4y = 0$.

5-23. $y = x^3 - 2x^2 + x$.

Hallar las ecuaciones de las tangentes a las curvas siguientes en el punto indicado de estas curvas:

5-24. $x^2 + 4xy + 6y - 7 = 0$, y P $(-1,3)$.

5-25. $xy + 6x - 4y - 6 = 0$, y P $(2, 3)$.

5-26. $y = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x + 4$, y P $(0, 4)$.

5-27. $y^2 = x^3 + 8$, y P $(2, 4)$.

5-28. Calcular el ángulo que forman entre sí las curvas $xy + 4y - 2x = 0$ y $x^2 + 4xy + x + 3y = 0$.

5-29. Calcular el ángulo de la recta $-3y + 2x = 9$ con la curva $xy + 6x - -4y - 19 = 0$ en el punto P $(3, -1)$.

5-30. Hallar la ecuación de la tangente en el origen a la curva

$$x^3 - 4x - 2y = 0.$$

5-31. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 + x^2$ y de pendiente 8.

5-32. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ en los que las tangentes son paralelas a la línea $y = 3x - 7$.

5-33. Determinar todas las tangentes a la curva $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ paralelas a la recta $-4y + 7x = -28$, y escribir sus ecuaciones.

5-34. Hallar los valores de a para los cuales la recta $y = 2x + a$ corta o es tangente, o bien es exterior a la elipse $x^2 + 4y^2 - 8x + 4y = 0$.

Idem para las curvas:

5-35. $y = ax - 1$ y $x^2 = 4y$.

5-36. $x^2 + y^2 = a^2$ y $3x - 4y = -10$.

5-37. $4x^2 - y^2 = 16$ e $y = ax$.

5-38. $xy = a$ y $2x + y = -4$.

5-39. $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$ e $y = ax + 2 - 4a$.

Calcular los valores de a para los que las curvas siguientes son tangentes:

5-40. $x^2 - 4y + 16 = 0$ e $y = a$.

5-41. $4xy + y^2 + 16 = 0$ y $x = a$.

5-42. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 6y = 0$ y $4x - 3y = a$.

5-43. Hallar las condiciones de tangente de la recta $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$ y de la parábola $y^2 = 2px$.

5-44. Hallar las ecuaciones de las rectas de pendientes $m = \frac{1}{2}$ que son tangentes a la hipérbola $-6y^2 + x^2 + 12y - 18 = 0$ y hallar los puntos de tangencia.

Hallar las condiciones de tangencia de las curvas siguientes:

5-45. $x^2 - y^2 = a^2$ e $y = Kx$.

5-46. $y^2 + 4x^2 - 4x - 8 = 0$ e $y = 2x + K$.

5-47. $2xy = a^2$ y $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

5-48. $x^2 + y^2 = a^2$ y $Ax + By = 1$.

5-49. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $y = mx + p$.

5-50. $x^2 + y^2 = a^2$ y $4y - 3x = 4K$.

Hallar las ecuaciones de las tangentes a las curvas siguientes y que satisfagan las condiciones indicadas:

5-51. $y^2 = 4x$, pendiente $= 1/2$.

5-52. $x^2 + y^2 = 16$, pendiente $= -4/3$.

5-53. $x^2 - 4y^2 = 36$, perpendicular a $6x - 4y = -9$.

5-54. $x^2 = 4y$, y pasando por $(0, -1)$.

5-55. $x^2 = 8y$, y pasando por $(0, 2)$.

5-56. $y^2 = 2px$, pendiente m.

5-57. $2xy = a^2$, pendiente m.

5-58. $y^2 + 4x^2 - 6x + 6y = 0$, pasando por $(1, 1)$.

Hallar la ecuación de las tangentes comunes a las curvas siguientes (se buscarán las ecuaciones de las tangentes a cada curva y se igualarán sus pendientes):

5-59. $y^2 = 5x$ y $9x^2 + 9y^2 = 16$.

5-60. $x^2 + y^2 = 49$ y $x^2 + y^2 - 20y + 99 = 0$.

Hallar las ecuaciones de las tangentes a las curvas siguientes y en los puntos indicados:

5-61. $xy = 16$, y P $(4, 4)$.

5-62. $x^2 = 4y$, y P $(-2, +1)$.

5-63. $x^2 + 2xy = 4$, y P $(2, 0)$.

5-64. La curva $y = x^2 - 1$ es cortada por la recta $y = x + 5$. Calcular las coordenadas de los puntos de intersección y hallar el ángulo que forman la curva y la recta en esos puntos.

5-65. Idem para la curva $xy = 4$ y la recta $10y = 7x + 4$.

Idem para las curvas:

5-66. $x^2 + y^2 = 5$ y $x^2 - y^2 = 2$.

5-67. $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 4$.

Calcular las ecuaciones de la tangente y de la normal de las curvas:

5-68. $y = 4x^2$, en el punto en que $x = 2$.

5-69. $y^3 = 8x^2$, en el punto en que $x = 2$.

5-70. Hallar el ángulo bajo el que se cortan el círculo $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $x^2 = 2y$.

5-71. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $5ax^2 - 4x^3y = 4y^3$ en el punto $(2a, a)$.

5-72. Idem para la estrofoide

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \qquad \text{en el punto } \left(-\frac{3a}{5}, \frac{6a}{5}\right).$$

5-73. Idem para la elipse

$$3x^2 + 5y^2 = 32$$

en el punto en que la abscisa es igual a la ordenada.

Hallar la ecuación de la tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto (x_0, y_0):

5-74. $y^2 = x^5$.

5-75. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

5-76. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

5-77. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

5-78. Determinar el valor de p para que la recta $y = 3x + p$ sea tangente a la curva $2xy + 5y + 2x + 4 = 0$.

Hallar los ángulos bajo los que se cortan las curvas siguientes:

5-79. $x + y - 7 = 0$ y $x^2 - 4x - 3y + 1 = 0$.

5-80. $2y^2 - 9x = 0$ y $3x^2 + 4y = 0$.

5-81. $x^2 + y^2 = 45$ e $y^2 = 12x$.

5-82. $y^2 = x^3$ e $y^2 = \dfrac{x^3}{5 - x}$.

5-83. $x^2y = 4$ e $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$.

5-84. $xy = a^2$ e $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

5-85. $y^2 = 6(x - 3)$ y $4y^2 = (x - 3)^2(x - 1)$.

5-86. $xy = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$.

5-87. Hallar un punto sobre la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, tal que la tangente en él esté igualmente inclinada sobre los ejes.

Calcular las longitudes de las tangentes y de las normales (es decir, las longitudes desde el punto de contacto sobre la curva al eje de las x) de las curvas:

5-88. $3x^2 - 10y^2 = 17$, en el punto $(3, 1)$.

5-89. $y^2 = 4x$, en el punto $(9, -6)$.

5-90. $2x^2 - y^2 = 14$, en el punto $(3, -2)$.

5-91. $x^2 + 5y^2 - 14 = 0$, en el punto $(3. 1)$.

5-92. a 5-95. Calcular las subtangentes y subnormales de las cuatro curvas anteriores con los mismos puntos.

Puntos singulares (y puntos de inflexión).

Hallar los puntos singulares de las curvas:

5-96. $(y-1)^2 - x^2(x+1) = 0$ para $x = 0$.

5-97. $y^2 = x^3$ para $x = 0$.

5-98. $y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0$ para $x = 0$

5-99. $y = \dfrac{1}{\log x}$ para $x = 0$.

5-100. $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ para $x = 0$.

5-101. $x^3(x - 2y) - y(x^2 - y^2) = 0$ para $x = 0$.

5-102. $x^2 + y^2 = y^3 - x^3$.

5-103. $x^4 + 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$.

5-104. $x^3 - y^3 + (y + x)^2 = 0$.

Hallar los puntos de inflexión de las curvas:

5-105. $y = \dfrac{1}{12}(x^3 - 6x^2)$.

5-106. $y = (x-2)^{1/3}$.

5-107. $y = 2x^3 + 9x^2 - 2x - 5$.

5-108. $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4$.

5-109. $y = (x + 6a)(x - a)^{4/3}$.

5-110. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

5-111. $y = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x-1}$.

5-112. $a^2y^2 = x^2 + x^2y^2$.

5-113. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

Hallar los valores de x para los que las curvas siguientes

5-114. $y = 4x^3 - 6x^2 + 3$.

5-115. $y = x^4 - 12x^2$.

5-116. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, son cóncavas por arriba y por abajo.

Puntos de inflexión de las curvas:

5-117. $a^n y = y^{n+1}$.

5-118. $x^3 - axy - b^2y = 0$.

5-119. $y = e^{-x^2}$.

Puntos múltiples y singulares de las curvas:

5-120. $(a^2y - bx^2)^2 = a^4(x - a)^5$.

5-121. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$.

5-122. $y^2 = ax^3$ (evoluta de la parábola).

5-123. $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + a = 0$. ¿Para qué valor de a existen puntos múltiples? Calcular las tangentes en esos puntos.

5-124. $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$.

5-125. $y^2 = x^3$.

5-126. $(y - x^2)^2 = x^5$.

Hallar los puntos de inflexión de las curvas siguientes:

5-127. $4y = 6x^2 - x^3$.

5-128. $y^2 = ax^2 + bx^3$.

5-129. $y = \cos mx$.

5-130. $y = e^{-\frac{1}{ax}}$.

5-131. $xy^2 + ax^2 + b^3 = 0$.

5-132. $a^ny + x^{n+1} = 0$.

5-133. $y = \log(1 + x^2)$.

5-134. $y = a + (x - b)^3$.

5-135. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

5-136. $y = \log \cos x$.

Puntos singulares de las curvas:

5-137. $(a^2y - bx^2)^2 = a^4(x - a)^5$.

5-138. $ay^2 - x^3 + bx^3 = 0$.

5-139. $y^2(a - x) - x^3 = 0$.

5-140. $(x^2 - y^2)ay - x^4 = 0$.

141. $y^4 + x^4 - 2bx^2y = 0$.

5-142. $y^2 = x^3 - x^2$.

Puntos de detención de las curvas:

5-143. $y = \dfrac{1}{\log x}$.

5-144. $y = e^{1/x}$.

5-145. $y = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$.

5-146. $y = x \log x$.

CAPITULO VI

Asíntotas

Hallar las asíntotas de las curvas siguientes:

6-1. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

6-2. $y = \dfrac{2a(x^2 - ax + a^2)}{(x-a)^2}$.

6-3. $y = \sqrt{\dfrac{x(x^2-a^2)}{a}}$.

6-4. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

6-5. $y = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{a^2}{x}$.

6-6. $y = e^x$.

6-7. $y = xe^{1/x}$.

6-8. $2x^2 - xy - 2x + 2y - 1 = 0$.

6-9. $y = x \pm \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

6-10. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

6-11. $3xy - 2x - 5y + 2 = 0$.

6-12. $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 + 2x + 2}$.

6-13. $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$.

6-14. $x^2y - 2x^2 - y + 1 = 0$.

6-15. $x^3 - y(x - a) = 0$.

6-16. $y^3 = ax^2 + x^3$.

6-17. $y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$.

6-18. $a^2x = y(x - a)^2$.

6-19. $y^3 = 2ax^2 - x^3$.

6-20. $y^2a = y^2x + x^3$.

6-21. $xy^2 + x^2y = a^3$.

6-22. $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

6-23. $(x - y)(x - 2y) - 3x + 4y + 1 = 0$.

6-24. $y = x\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}}$.

6-25. $y = ax + \dfrac{1}{ax}$.

CAPITULO VII

Cónicas

Trazar las cónicas siguientes, calculando las coordenadas de los focos y la ecuación de las directrices:

7-1. $y^2 = 4x$,

7-2. $\dfrac{9x^2}{64} + \dfrac{3y^2}{16} = 1$,

7-3. $\dfrac{25x^2}{144} - \dfrac{5y^2}{36} = 1$.

7-4. Trazar la curva $4y + x^2 = 0$ y hallar el foco y la directriz.

7-5. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(3, -2)$, la directriz es paralela al eje de las x y el parámetro es $p = 3$.

Construir las cónicas siguientes, determinar el foco y trazar la directriz:

7-6. $x^2 - 8y = 0$,

7-7. $y^2 - 6x = 0$,

7-8. $y^2 + 4x = 0$,

7-9. $y^2 + x = 0$.

7-10. Hallar la ecuación de la tangente a la elipse $3x^2 + 4y^2 = 13$ y paralela a la recta $y = 3x + 4$.

7-11. Hallar la ecuación de la normal a la elipse $2x^2 + y^2 = 3$ y perpendicular a la recta $y + 2x = 0$.

7-12. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes a la elipse perpendiculares entre sí.

7-13. Hallar la excentricidad de las dos hipérbolas

$$4x^2 - 8y^2 = 5 \qquad \text{y} \qquad x^2 - y^2 = 8.$$

7-14. Escribir la ecuación de la tangente a la hipérbola $5y^2 - 3x^2 + 2 = 0$ y paralela a la recta $y = 2x - 1$.

7-15. Escribir la ecuación de la normal a la hipérbola $3y^2 - 2x^2 = 2$ y perpendicular a la recta $3y - x = 9$.

Siendo la directriz paralela al eje de las y, hallar la ecuación de la parábola en los casos siguientes:

7-16. $p = 6$, estando el vértice en el punto $(3, 4)$,

7-17. $p = -4$, estando el vértice en el punto $(2, -3)$,

7-18. $p = 4$, estando el vértice en el punto (a, b).

7-19. Hallar la ecuación de la parábola cuando su eje es paralelo al eje de las y y tiene por vértice el punto (a, b).

Hallar la ecuación de una elipse cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas y sus focos están sobre el eje de las x, si:

7-20. $b = 4$, $c = 3$,

7-21. $c = 8$, excentricidad $e = 2/3$.

Idem, para las hipérbolas:

7-22. $a = 4$, $c = 5$,

7-23. $c = 8$, $e = 4$.

7-24. Hallar la excentricidad de la hipérbola equilátera $xy = 1$.

Hallar las ecuaciones de las asíntotas y de las hipérbolas conjugadas de las hipérbolas siguientes:

7-25. $9x^2 - 25y^2 = 100$,

7-26. $4x^2 - y^2 = 36$,

7-27. $16x^2 - y^2 + 64 = 0$,

7-28. $8x^2 - 16y^2 + 25 = 0$.

7-29. Demostrar que si e y e' son las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas, se verifica:

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1.$$

Determinar la naturaleza de las cónicas siguientes:

7-30. $y^2 + 4y - 3 = 0$,

7-31. $y^2 + 3x - 4y + 9 = 0$,

7-32. $7y^2 + x^2 - 8x + 1 = 0$,

7-33. $x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$,

7-34. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 8 = 0$,

7-35. $9y^2 + 6xy + x^2 + 2x - 6y = 0$,

7-36. $-y^2 - 2xy + x^2 + 8x - 6 = 0$,

7-37. $9y^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$,

7-38. $y^2 + 4xy + 4x^2 + 2y + 4x - 48 = 0$,

7-39. $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 12x - 30y + 9 = 0$,

7-40. $7y^2 - 10xy + 3x^2 + 15x - 7y - 42 = 0$.

7-41. Hallar los valores de a y b para que la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pase por los puntos $(3, -6)$ y $(4, 8)$.

Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos:

7-42. $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(4, 4)$, $(4, -4)$,

7-43. $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(6, 6)$, $(5, 6)$.

7-44. Tomando a A como parámetro, discutir la forma de la cónica

$$Ax^2 - y^2 + y + x + 1 = 0.$$

Determinar la naturaleza de las cónicas siguientes y hallar las pendientes de las direcciones asintóticas si hay lugar:

7-45. $-6y^2 - xy + x^2 - 8x = 0$,

7-46. $-y^2 + xy + 4x - 6 = 0$,

7-47. $4y^2 + 4xy + x^2 - 2x = 0$,

7-48. $y^2 + xy + 4x^2 - 3 = 0$,

7-49. $y^2 - 6xy + 9x^2 - 2y + 5 = 0$,

7-50. $4y^2 + 5xy + x^2 - 10 = 0$,

7-51. $xy + Ex + Dy + F = 0$.

7-52. a 7-55. Hallar las ecuaciones de las asíntotas a las hipérbolas **7-45**, **7-46**, **7-50** y **7-51** del problema anterior.

Hallar las ecuaciones de las asíntotas a las hipérbolas siguientes:

7-56. $-4y^2 + x^2 + 2x + 8y = 0$,

7-57. $3y^2 - 7xy + 2x^2 = 0$,

7-58. $xy - 4x - 3y = 0$,

7-59. $2x^2 - xy - 4 = 0$.

7-60. $-y^2 + xy + 2x = 0$,

7-61. $2y^2 - 5xy - 3x^2 - y + 10x - 13 = 0$,

7-62. $2xy - 6x^2 - 3y + 17x - 16 = 0$.

7-63. Calcular el ángulo α formado por las dos asíntotas de la hipérbola

$$y^2 - 7xy + 10x^2 + 4y - x - 2 = 0.$$

Hallar la ecuación de la cuerda de la cónica:

7-64. $y^2 + x^2 = 25$ que está dividida en partes iguales por el punto $(2, 1)$.

7-65. $xy = 4$ que está dividida en partes iguales por el punto $(5, 3)$.

7-66. $x^2 - xy - 8$ que está dividida en partes iguales por el punto $(4, 0)$.

Hallar la ecuación de la cónica siguiente, así como su naturaleza:

7-67. pasa por los puntos $(0, 5)$, $(5, 0)$ y es simétrica con relación a los dos ejes,

7-68. pasa por los puntos $(0, 2, (-2, 0), (2, -8)$ y es simétrica con relación al origen.

Hallar la ecuación de las parábolas que pasan por los puntos siguientes:

7-69. $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 0)$, $(-1, 0)$,

7-70. $(0, 1)$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $(2, 0)$, $(-1, 0)$.

Estudiar y trazar las cónicas:

7-71. $5y^2 - 2xy + x^2 + 6y - 2x = 0$,

7-72. $-3y^2 + 2xy + x^2 + 2x = 0$,

7-73. $y^2 + \sqrt{3}xy + 2x^2 - 8y = 0$,

7-74. $xy + y^2 + x - 4 = 0$,

7-75. $(2y - x)^2 + x - 4 = 0$,

7-76. $y^2 - 2xy + 2x^2 - 3y - 5x + \frac{13}{4} = 0$,

7-77. $-y^2 + 2xy + 5y - 5x - \frac{29}{4} = 0$,

7-78. $4y^2 + 4xy + x^2 + 4y + 6x - 7 = 0$,

7-79. $-y^2 + 4xy + 5x^2 - 2y - 8x + 3 = 0$,

7-80. $4y^2 - 4(3x - 1)y + 9x^2 - 6x = 0$,

7-81. $y^2 - 2xy + x^2 + 2y + 2x + 1 = 0$,

7-82. $y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 2x + 4 = 0$,

7-83. $y^2 - 4xy + 3x^2 - 2y + 5x + 3 = 0$.

Hallar los centros de las cónicas siguientes:

7-84. $x^2 + xy - 4 = 0$,

7-85. $y^2 - 2xy + x^2 - 4x = 0$,

7-86. $-2y^2 + xy - 4y + 4x = 0$,

7-87. $9y^2 + 12xy + 4x^2 - 2x + 6 = 0$,

7-88. $9y^2 + 12xy + 4x^2 - 6y - 4x - 8 = 0$.

7-89. Calcular a y b para que la cónica

$$y^2 - (a + 3)xy + 3ax^2 + (b + 3)y - (ab + 9)x + 3b - 5 = 0$$

tenga por centro el punto $(1, 1)$.

7-90. Trazar la cónica $(x - y)^2 = x + y$, y calcular el radio de curvatura en el origen.

7-91. Comprobar si la recta $3x - 2y + 6 = 0$ corta a la cónica $y^2 + 4x = 0$. En tal caso, hallar las coordenadas de los puntos de intersección.

7-92. Idem, para la recta $4x + y + 5 = 0$ y la elipse $9x^2 + y^2 = 9$.

7-93. Idem, para la recta $x - y = 0$ y la cónica $x^2 - y^2 + 3x - 3y = 0$.

CAPITULO VIII

Reducción de la ecuación general de las cónicas

Reducir y simplificar las ecuaciones de las cónicas siguientes, trasladando el origen y girando los ejes:

8-1. $x^2 - y^2 + 2xy + 2x = 0$.

8-2. $x^2 + y^2 - 6xy + 2x = 0$.

8-3. $2y^2 - 2xy + x^2 - 6y + 2x + 1 = 0$.

8-4. $y^2 - 4xy + 4x^2 - 4y - 2x + 10 = 0$.

8-5. $y^2 - 2xy + x^2 + 2y + 2x + 1 = 0$.

8-6. $2y^2 + xy + 2x^2 + 10y - x + 30 = 0$.

8-7. $y^2 + 2xy + x^2 - 6y + 9 = 0$.

8-8. $-4y^2 - x^2 - 5y + x = 0$.

8-9. $y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 7x - 1 = 0$.

8-10. $y^2 - 8xy + 7x^2 - 4y - 2x - 1 = 0$.

8-11. $9y^2 - 24xy + 16x^2 - 34y - 38x + 11 = 0$.

Simplificar las ecuaciones siguientes al trasladar el origen de los ejes al centro de la curva:

8-12. $x^2 - 2xy + 2y + 2x + 1 = 0$.

8-13. $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 3x + 7 = 0$.

Trazar, discutir y simplificar las cónicas siguientes, al trasladar el origen y girar los ejes:

8-14. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x - 6y = 0$.

8-15. $5y^2 + 6xy + 5x^2 + 22x - 6y + 21 = 0$.

8-16. $y^2 + 6x - 6y + 21 = 0$.

8-17. $12xy - 5y^2 + 48y - 36 = 0$.

8-18. $9y^2 - 6xy + x^2 - 12y + 4x + 4 = 0.$

8-19. $-3y^2 + 3xy + 16x^2 - 80y - 60x + 400 = 0.$

8-20. $-7y^2 - 5xy + 5x^2 - 165x + 1.320 = 0.$

8-21. $y^2 + 4xy + 4x^2 + 8x - 16y = 0.$

8-22. $(x - y)^2 = x + y.$ (girar los ejes 45°).

Si K es un parámetro positivo o negativo variable, discutir las cónicas siguientes:

8-23. $4y^2 + x^2 = K.$

8-24. $4x^2 - 16y^2 = K.$

8-25. $y^2 = 2Kx + 16.$

8-26. $\dfrac{x^2}{25 - K} + \dfrac{y^2}{9 - K} = 1.$

8-27. $xy = K.$

8-28. $(y - K)^2 = Kx.$

8-29. $16(x - K)^2 + 9y^2 = 144.$

CAPITULO IX

Continuación de las cónicas
Diámetros. Ejes. Focos. Directrices

Hallar el centro y la posición de los ejes de las cónicas siguientes:

9-1. $y^2 + xy + x^2 - 5x - 4y + 2 = 0$.

9-2. $y^2 - \sqrt{3}xy + 2x^2 - 5y + 1 = 0$.

9-3. $9y^2 - 6xy + x^2 + y - 4x = 0$.

9-4. Sea la cónica $4xy + 4y - 1 = 0$. Probar que representa una hipérbola equilátera. Hallar el centro, los ejes, las asíntotas, los vértices, los focos y las directrices.

Trazar las cónicas siguientes, determinando los focos y las directrices.

9-5. $5x^2 - 12xy + 6x - 36y - 63 = 0$.

9-6. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 50x + 80y - 275 = 0$.

9-7. Estudiar el sistema $\dfrac{x^2}{K^2} + \dfrac{y^2}{16} = 0$ para los valores positivos de K.

¿En qué se transforman los focos y las directrices a medida que crece y decrece K y tiende a 16?

Hallar la ecuación del diámetro de las cónicas siguientes:

9-8. $9y^2 + 4x^2 = 36$, y pasando por (3, 2).

9-9. $y^2 = 4x$, y pasando por (2,1).

9-10. $xy = 8$, y pasando por $(-2, +3)$.

9-11. $-y^2 + xy - 2x - 4 = 0$, y pasando por (5, 2).

Hallar la ecuación del diámetro de cada una de las cónicas siguientes que cortan a las cuerdas de pendiente dada m en dos partes iguales:

9-12. $2y^2 + xy - 2y - 4x + 6 = 0$ y $m = 2/3$.

9-13. $x^2 - xy - 8 = 0$ y $m = 1$.

9-14. $xy = 6$ y $m = 3$.

9-15. $y^2 = 4x$ y $m = -1/2$.

9-16. $-4y^2 + x^2 = 16$ y $m = 2$.

9-17. Escribir la ecuación del diámetro que pasa por el punto $(3, -2)$, y la de su conjugado, respecto de la cónica

$$3y^2 - 6xy + 2x^2 - y + 5x - 4 = 0.$$

9-18. Escribir la ecuación del diámetro que es paralelo a la recta $5y - 20x = -5$ en la cónica $3y^2 + x^2 - y + 7 = 0$.

9-19. Escribir las ecuaciones de los ejes de la curva

$$y^2 - 3xy + 5x^2 + 2y - 3x - 5 = 0.$$

Hallar los focos y las directrices de las cónicas siguientes:

9 20. $3y^2 - 16xy + 15x^2 + 12y - 50x - 24 = 0$.

9 21. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$.

9-22. Calcular el producto de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola $-4y^2 + x^2 = 5$ a sus asíntotas.

9-23. Una hipérbola tiene por expresión $2x^2 - 3y^2 = 6$, calcular su ecuación referida a sus asíntotas y determinar el ángulo θ que forman éstas.

9-24. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ en el punto (x_0, y_0).

9-25. Escribir las ecuaciones de las directrices de la elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$.

9-26. Explicar el porqué de que todas las cónicas $Ay^2+Cy^2+Dy+Ex+F=0$ tengan sus ejes paralelos a los de coordenadas, cualesquiera que sean los coeficientes.

Estudiar las cónicas siguientes, calculando las ecuaciones reducidas, dibujándolas, hallando el centro, ejes, vértices, focos y directrices:

9-27. $5y^2 - 2xy + x^2 + 6y - 2x = 0$.

9-28. $7y^2 - 4\sqrt{3}xy + 3x^2 + 18x - 12\sqrt{3}y = 0$.

Nota: Esta pregunta puede aplicarse también a todas las cónicas dadas en el capítulo VIII.

9-29. Discutir la naturaleza de las cónicas

$$x^2 + 2axy + y^2 - 2ax + 2y + 2 = 0$$

cuando a varía de $-\infty$ a $+\infty$.

9-30. Hallar el lugar geométrico del centro de las cónicas

$$K^2y^2 - K(1 - K)xy + x^2 - aK^2y = 0$$

cuando varía K.

CAPITULO X

Envolventes y evolutas

10-1. Hallar la envolvente de una recta que forma con los ejes un triángulo rectángulo de área constante S.

10-2. Envolvente de las parábolas $y = ax - \frac{1 + a^2}{4b}x^2$, en donde a es un parámetro variable.

10-3. Envolvente de las normales de la parábola $y^2 = 2px$.

10-4. La tangente M a una hipérbola corta al eje focal en T. Hallar la envolvente de la perpendicular trazada desde T sobre el diámetro OM.

10-5. Envolvente de los círculos que tienen por diámetro las cuerdas de una parábola que pasan por el foco.

Hallar la ecuación de la envolvente:

10-6. De la familia de rectas $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p$, en donde α es un parámetro variable.

10-7. De la familia de elipses cuyos ejes coinciden, y de superficie constante.

10-8. De la familia de rectas $y = 2mx + m^4$, en donde m es un parámetro variable.

10-9. De la familia de parábolas $y^2 = a(x - a)$, en donde a es el parámetro.

10-10. De la familia de círculos $x^2 + (y - a)^2 = R^2$, en donde a es un parámetro.

10-11. De la familia de círculos cuyos diámetros son el doble de las ordenadas de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

10-12. De la familia de círculos que pasan por el origen y tienen sus centros *sobre la hiyérbola* $x^2 - y^2 = a^2$.

10-13. De la familia de círculos $x^2 + y^2 - 2(a + \ )x + a^2 = 0$, en donde a es un parámetro.

10-14. El centro de un círculo se desplaza sobre la parábola $y^2 = 2px$, y su circunferencia pasa por el vértice de ella. Hallar la ecuación de la envolvente de los círculos.

10-15. Consideremos la curva $y^2 = 2px$, y la tangente en un punto M de ella que corta a los dos ejes en A y en B. Si P es el punto medio de AB, hallar la envolvente de la perpendicular trazada en P a la tangente MP.

10-16. Hallar la envolvente de la familia de rectas $ax + by = K^2$, estando ligados los parámetros a y b por la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

10-17. Hallar la ecuación de la recta cuya envolvente es $xy = a^2$.

Evolutas.

Hallar la ecuación de la evoluta de:

10-18. La hipérbola $xy = 1$.

10-19. La parábola $y^2 = 2px$.

10-20. La curva $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$.

10-21. La curva $3ay^2 = x^3$.

10-22. La catenaria $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

10-23. La curva $y = x^3$.

10-24. La curva $y = ae^{\frac{x}{n}}$

CAPITULO XI

Curvas en coordenadas cartesianas

Trazar las curvas de las funciones siguientes:

11-1. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a}$.

11-2. $y + x^3 - 3x + 2$.

11-3. $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$.

11-4. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{2x - 1}{x - 1}}$

11-5. $y = xe^{-\frac{1}{x}}$.

11-6. $y = e^{-x^2}$.

11-7. $y = \log (x^3 - 3x + 2)$.

11-8. $y = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\sqrt{3} + \cos x}$.

Estudiar las siguientes curvas en el origen:

11-9. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

11-10. $x^2(x^2 - y^2) + y(x^2 - 4y^2) = 0$.

11-11. $y = ae^{-x} \cdot \operatorname{sen} mx$.

1-12. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

11-13. $y = x \log x$.

Trazar las curvas de las funciones siguientes y determinar sus asíntotas:

11-14. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1}$.

11-15. $y = x\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

11-16. $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

11-17. $y^2 = a^2\left(\dfrac{x-a}{x}\right)$.

11-18. $y^2 = a^2\left(\dfrac{a-x}{x}\right)$.

11-19. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

11-20. $y = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$.

11-21. $y = \dfrac{x(e^x + 1)}{e^x - 1}$.

11-22. $y = \log(x^2) + \dfrac{3x-2}{x-1}$.

11-23. $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$, para $x > 1$.

11-24. $y = \dfrac{2x^2 - 4x^3}{x^2 + 1}$.

11-25. $2x^2 + xy - Ky = 0$.

11-26. $y = \log \dfrac{1}{\cos x}$.

11-27. $y = x(x+1) \pm \sqrt{x^5}$.

11-28. $y = \cos \sqrt{x}$.

11-29. $x = y + 1 + \dfrac{1}{y-1}$.

11-30. $y = \dfrac{\log(1-x)^2}{x}$.

11-31. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

11-32. $y^2 = \log x$.

11-33. $y = \pm \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$.

11-34. $y = \frac{\pm 2x \sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2}}$.

Trazar las curvas de las funciones siguientes, hallando los puntos de inflexión:

11-35. $y = x^2 - x^4$.

11-36. $y^2 = 1 + x^3$.

11-37. $y^2 = x^3 - x^4$.

11-38. $y^3 = x^3 - x$.

11-39. $y^2 = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Trazar las curvas de las funciones siguientes y hallar las asíntotas:

11-40. $y = x \cdot e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

11-41. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$.

11-42. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

11-43. $\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$.

11-44. $x^2 + 4xy - 3x - 2y - 1 = 0$.

11-45. $y = x^n + \frac{1}{x}$ (n entero y positivo, se hará $n = 1, 2, 3$).

11-46. $y = \frac{x^4}{x^2 - 5x + 6}$.

11-47. $y = \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}$.

11-48. $y = (1 + x)^{1/x}$.

11-49. $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$.

11-50. $y = \dfrac{x^4 - 6x + 1}{x^3 - 1}$.

11-51. $y = x - \dfrac{2}{x} - 3\log x$.

11-52. $y = \log(x^2 - 3x + 2)$.

11-53. $y = e^{x^2-3x+2}$.

11-54. $y = \pm\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

11-55. $y = xe^{-x^2}$.

11-56. $y = xe^{1/x}$.

11-57. $y^2 = \dfrac{a^2x}{a - x}$

11-58. $y = x \pm \sqrt{1 - x^2}$.

11-59. $y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

11-60. $y = \dfrac{3x - x^2 - 2}{x^2}$

11-61. $y = e^{1/x}$.

11-62. $y = 2\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x$.

11-63. $y = \dfrac{x}{e^x - 1}$

11-64. $y = \dfrac{x^3}{x^3 + x - 2}$.

11-65. $y^2 = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9}$.

11-66. $y = xe^{-1/x}$.

11-67. $y = x^3\log x - x - 1$.

11-68. $y = \dfrac{3x^3 + 5x^2}{x^2 + 3}$

11-69. $y = \dfrac{7x^2 + 12x + 4}{(x^2 + 3x + 2)^2}$.

11-70. $y = \dfrac{x^2 - 100}{x^2 - 1}$.

11-71. $y = L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = f(\omega)$,

11-72. $y = \text{arc tg}\, \dfrac{L\omega}{R} = f(\omega)$.

11-73 $y = \dfrac{L\omega}{1 - LC\omega^2} = f(\omega)$.

11-74. $y = \dfrac{1 - ax^2}{ax^3 - cx}$.

11-75. $y = \dfrac{x}{a^2 + b^2x^2}$.

11-76. $y = \dfrac{\text{sen } 2x - 1}{\text{sen } x}$.

CAPITULO XII

Curvas en coordenadas polares

Trazar las cónicas siguientes, hallar la excentricidad, el foco y la directriz:

12-1. $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

12-2. $\rho = \dfrac{12}{3 - 4\cos\theta}$.

12-3. $\rho = \dfrac{8}{1 + \cos\theta}$.

12-4. $\rho = \dfrac{7}{3 + 10\cos\theta}$.

Trazar las curvas:

12-5. $\rho = 10\cos\theta$.

12-6. $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$.

12-7. $\rho = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$.

12-8. $\rho = \dfrac{6}{\cos\theta}$.

12-9. $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta - 1}$.

12-10. $\rho = \dfrac{4}{2\cos\theta - 1}$ y hallar la asíntota.

12-11. $\rho = e^{\operatorname{sen}\theta}$.

12-12. $\rho = \operatorname{sen} 2\theta + 2\cos\theta$.

12-13. $\rho = \dfrac{a}{\cos\omega \cdot \cos 2\omega}$.

Transformar a coordenadas polares las ecuaciones siguientes:

12-14. $x - 3y = 0$.

12-15. $y + 5 = 0$.

12-16. $x^2 + y^2 = 16$.

12-17. $x^2y^2 - ax = 0$.

12-18. $2xy = 7$.

12-19. $x^2 - y^2 = a^2$.

12-20. $2xy + 4y^2 - 8x + 9 = 0$.

12-21. Las cuerdas del círculo $\rho = 2a\cos\theta$ que pasan por el polo se prolongan una longitud $2b$. Hallar el lugar geométrico de sus extremos.

12-22. $\rho = a\theta$.

12-23. $\rho\theta = a$.

12-24. $\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta = a^2$.

12-25. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

12-26. $\sqrt{\rho}\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{a}$.

12-27. Calcular las coordenadas del punto de intersección y el ángulo que forman las rectas:

$$\rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2a \qquad \text{y} \qquad \rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = a.$$

Trazar las curvas:

12-28. $\rho = a(2 + \cos 2\theta)$.

12-29. $\rho = a(1 + \cos 3\theta)$.

12-30. $\rho = a \cdot \cos\dfrac{\theta}{3}$.

12-31. $\rho = 3 + \cos 5\theta$.

12-32. $\rho = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$.

12-33. $\rho = \operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

12-34. $\rho = \cos\theta \cdot \cos 2\theta$.

12-35. $\rho = a \cdot \operatorname{sen} 2\theta$.

12-36. $\rho = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

12-37. $\rho = \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\rho \cdot \cos\theta}$.

12-38. $\rho = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\theta}$.

12-39. $\rho = 1 + \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$.

12-40. Calcular el radio de curvatura de la espiral logarítmica $\rho = \rho_0 e^{m\theta}$.

12-41. Idem, para la lemniscata $\rho^2 = 2a^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

Hallar las asíntotas de la curvas siguientes:

12-42. $\rho = \dfrac{a}{2}$.

12-43. $\rho = a \operatorname{tg} \theta$.

12-44. $\rho = a \cdot \theta^{-1/2}$.

12-45. $(\rho - a) \operatorname{sen} \theta = b$.

12-46. $\rho^2 = a^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

12-47. $\rho = a\sqrt{\operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2}}$.

12-48. $\rho = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$.

12-49. $\rho = \dfrac{a(1 + \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$.

12-50. $\rho^2 = a \operatorname{sen}^3 \theta$.

CAPITULO XIII

Curvas de las funciones paramétricas

Trazar las curvas de las funciones siguientes, y verificarlas estableciendo las ecuaciones en coordenadas rectangulares.

13-1. $x = at^2, \quad y = a^2t^3.$

13-2. $x = \dfrac{at + b}{t + 1}, \quad y = \dfrac{ct + d}{t + 1}.$

13-3. $x = t + 4, \quad y = \dfrac{t^3}{8}.$

13-4. $x = 4t, \quad y = \dfrac{2}{t}.$

13-5. $x = t - 3, \quad y = \dfrac{t^2}{4}.$

13-6. $x = a \cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right), \quad y = b \operatorname{sen} 2t.$

13-7. $x = \dfrac{2at^3}{(t-3)^2(t-1)}, \quad y = \dfrac{at^3}{t-1}.$

13-8. $x = t(t-3)^2, \quad y = (t-2)(t+1)^2.$

13-9. $x = \dfrac{t}{t^2-1}, \quad y = \dfrac{t-2}{(t-1)(t-2)}$ y hallar la asíntota.

13-10. $x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{at^3}{1+t^2}.$

13-11. $x = 3 + 2 \cos t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t - 1.$

13-12. $x = 2 \cos \theta, \quad y = 4 \operatorname{sen} \theta.$

Escribir la ecuación de la tangente en el origen a las curvas siguientes, cuando el parámetro es nulo:

13-13. $x = a \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{sen} \varphi.$

13-14. $x = (\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \quad y = (1 - \cos \varphi).$

Hallar los puntos de inflexión de las curvas:

13-15. $x = at - b \operatorname{sen} t, \quad y = a - t \cos t.$

13-16. $y = a - b \cos t, \quad x = at - b \operatorname{sen} t.$

Trazar las curvas de las funciones siguientes:

13-17. $x = \dfrac{t}{t-1}, \quad y = \dfrac{t-2}{t-1}.$

13-18. $x = \dfrac{at}{1+t}, \quad y = b\dfrac{t+1}{t-1}.$

13-19. $x = \dfrac{at^2}{t-1}, \quad y = \dfrac{at}{t^2-1}.$

13-20. $x = a\cos^3 t, \quad y = b \operatorname{sen}^3 t.$

13-21. $x = \dfrac{(t+2)^3}{t+1}, \quad y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}.$

13-22. $x = t(t-1), \quad y = t^3 - 1.$

13-23. $x = \dfrac{t^2}{t-1}, \quad y = \dfrac{t}{t^2-1}.$

13-24. $x = \pm\sqrt{t^2 - 3t + 2}, \quad y = \dfrac{1}{t}.$

13-25. $x = e^t, \quad y = \log t.$

13-26. $x = tg\, t, \quad y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}.$

13-27. Hallar los máximos y mínimos de la función

$$x = t(t-1), \quad y = t^3 - 1.$$

13-28. Concavidad y puntos de inflexión de la curva anterior.

13-29. Puntos dobles de la curva

$$x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

13-30. Hallar las asíntotas paralelas a los ejes de la curva

$$x = \frac{t}{t-1}, \quad y = t^2 - 1.$$

13-31. Hallar las asíntotas de la curva

$$x = \frac{1}{t-1}, \quad y = \frac{t^2+1}{t-1}.$$

Trazar las curvas de las funciones siguientes:

13-32. $x = \dfrac{1}{1-t}, \quad y = \dfrac{1+t^2}{t^2}.$

13-33. $x = \dfrac{t(t+2)}{t^2-1}, \quad y = \dfrac{t}{t+1}.$

13-34. $x = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{at(1-t^2)}{1+t^2}.$

13-35. $x = \operatorname{th} t, \quad y = \operatorname{th} 3t.$

(transformarla a coordenadas cartesianas).

Hallar la ecuación de la evoluta de cada una de las curvas siguientes:

13-36. $x = \dfrac{t^2+1}{4}, \quad y = \dfrac{t^3}{6}.$

13-37. $x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$

13-38. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\operatorname{sen}^3 t.$

13-39. $x = \dfrac{4}{t}, \quad y = 3t.$

13-40. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \quad y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t).$

13-41. $x = 2t, \quad y = t^2 - 2.$

13-42. $x = \dfrac{t^3}{3}, \quad y = t^2.$

Estudiar, en el origen, la forma de las curvas siguientes (puntos singulares):

13-43. $x = t^2, \quad y = t^2 - t^3.$

13-44. $x = t^2, \quad y = t^4 - t^5.$

Trazar las curvas de las funciones siguientes:

13-45. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \dfrac{t^3}{1-t^3}.$

13-46. $x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}.$

13-47. $x = \dfrac{a(t+1)^2}{t^2}, \quad y = \dfrac{a(t+1)^2}{t}.$

13-48. $x = \dfrac{1}{\cos t}, \quad y = \operatorname{sen} t.$

13-49. $x = 6 - t^2, \quad y = 2t.$

13-50. $x = t - 1, \quad y = t + 1.$

13-51. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t.$

13-52. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1.$

CAPITULO XIV

Curvas de las funciones implícitas

Trazar las curvas de las funciones siguientes:

14-1. $y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$.

14-2. $2x^3 - y^3 + (y - x)^2 = 0$.

14-3. $xy + y^2 + x - 4 = 0$.

14-4. $xy + y^2 + x - 4 = 0$.

14-5. $xy(x + y) - (x - y)^2 = 0$.

14-6. $y^3 - x^2 + x^2 = 0$.

14-7. $y^3 - xy^2 - 2x^2 = 0$.

COMPLEMENTOS

Lugares geométricos

Hallar los lugares geométricos siguientes:

C-1. De los puntos cuyas ordenadas son las mitades de las de los puntos del círculo $x^2 + y^2 = 64$, pero de abscisas iguales.

C-2. De los puntos que cortan a las ordenadas del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, de tal manera que la relación entre las ordenadas de esos puntos a las correspondientes a los puntos del círculo sean igual a $\frac{b}{a}$.

C-3. Se considera el punto $(0, 4)$ y se trazan segmentos de rectas desde ese punto a la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 16$. Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen a esos segmentos en la relación 1/2.

C-4. Una cuerda OP de un círculo $x^2 + y^2 + 2x = 0$ que pasa por el origen se prolonga una longitud $PP_1 = o$. Hallar el lugar de P_1.

C-5. Lugar de los puntos de intersección de dos tangentes rectangulares a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

C-6. Lugar de los puntos de intersección de las tangentes rectangulares a la parábola $y^2 = 2px$.

C-7. Idem para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Condiciones de posibilidad.

C-8. Lugar del vértice de un ángulo V constante y circunscrito a la parábola $y^2 = 2px$.

C-9. Lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos rectas dadas sea constante.

C-10. Lugar geométrico del centro de la cónica

$$-y^2 + 2axy + ax^2 - 2ay - 2x + a = 0$$

cuando varía a. Diferenciar las partes del lugar que proceden de los centros de elipses o de hipérbolas.

C-11. Envolvente del segundo lado MT de un ángulo recto, del cual un lado MF pasa por un punto fijo F, y el vértice M describe una recta fija M.

C-12. Lugar geométrico de los puntos de inflexión de las familias de curvas, cuando varía m:

$$y = \frac{mx + 1}{x - x^2}.$$

C-13. Se da la parábola $y^2 = 2px$. La tangente en un punto M cualquiera de ella corta a los ejes en los puntos A y B. Hallar el lugar geométrico del punto medio P de AB.

C-14. Hallar las ecuaciones paramétricas del lugar de los puntos P de un círculo que rueda sin deslizar en el interior de una circunferencia cuyo radio es cuatro veces mayor.

Fin del «*Curso elemental de Matemáticas superiores*».

240

MELENDEZ VALDES, 14 y 65 - MADRID-15